# Semnale Circuite si Sisteme - *Programa de bază:* 2002

### Cap.1. Semnale analogice

1.1. Semnale periodice. Seria Fourier. Proprietăți. Spectrul semnalelor periodice.
1.2. Semnale neperiodice. Transformarea Fourier. Spectrul semnalelor neperiodice.
1.3. Convoluția semnalelor analogice
1.4. Transformarea Laplace bilaterală și unilaterală în studiul semnalelor

### Cap.2. Semnale în timp discret

2.1. Semnale periodice în timp discret. Analiza cu seria Fourier. Diagrame spectrale.
2.2. Semnale neperiodice în timp discret. Transformarea Fourier a semnalelor în timp discret. Diagrame spectrale.
2.3. Convoluția semnalelor în timp discret

### Cap.3. Semnale eşantionate

3.1. Teorema eşantionării. Spectrul semnalului eşantionat. Condiția Nyquist.
3.2. Reconstituirea semnalului eşantionat

### Cap.4. Semnale modulate

4.1. Definiții și clasificări
4.2. Modulația cu purtător armonic. Modulația de amplitudine. Modulația de frecvență. Modulația de fază. Principiul multiplexării în frecvență a semnalelor.
4.3. Modulația cu purtător în impulsuri

### Cap.5. Sisteme şi concepte generale asociate

5.1. Introducere și clasificari
5.2. Proprietăți ale sistemelor analogice și ale sistemelor în timp discret. Relații generale între semnalele de intrare și semnalele de ieșire
5.3. Definirea funcției pondere pentru sisteme analogice și pentru sisteme în timp discret. Implicații ale proprietăților generale asupra funcției pondere.
5.4. Funcția de sistem pentru sisteme analogice liniare și invariante în timp. Definiții. Părți ale funcției de sistem. Funcții elementare. Filtre ideale.
5.5. Funcția de sistem pentru sisteme discrete liniare și invariante în timp.

### Cap.6. Metode generale de analiză a sistemelor analogice

6.1. Metode de analiză în domeniul timp: metode convolutive, metoda ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți.
6.2. Metode de analiză în domeniul frecvență: metoda transformatei Fourier, metoda transformatei Laplace, metoda armonică. Determinarea sub formă compactă a răspunsului la semnale periodice.
6.3. Sisteme selective de ordinul 2 și ordinul 4

### Cap.7. Metode generale de analiză a sistemelor în timp discret

7.1. Metode de analiză în domeniul timp
7.2. Metode de analiză [n domeniul frecvență

## Bibliografie


1. I.Constantin, *Semnale*, Tipografia Institutului Politehnic Bucure]ti, 1992
2. Ad. Mateescu, *Semnale, circuite şi sisteme*, Bucureşti, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1984
3. D. Stanomir, *Semnale analogice şi transformatele lor*, Editura Athena, 1995
4. D. Stanomir, *Semnale şi sisteme discrete*, Editura Athena, 1997
5. M. Săvescu, T. Petrescu, S. Ciochină, *Semnale circuite şi sisteme, probleme*, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1981
6. I. Constantin ş.a,. *Semnale, circuite şi sisteme, probleme*, 1990, Tipografia IPB
7. N. Dumitriu , L. Stanciu, *Semnale, circuite şi sisteme, probleme - Semnale şi sisteme*, 1991, Tipografia IPB
8. Ad. Mateescu, Al. Şerbănescu,N. Dumitriu , L. Stanciu, L. Anton, G. Alexandrescu, *Semnale, circuite şi sisteme, probleme*, Ed. Militară, 1998

TABELUL 4.2

**Proprietăţi ale** *TFD*

| Nr. | Proprietatea | Originalul | *TFD* |
|---|---|---|---|
| 1 | Liniaritatea | $\{c_1x_n^{(1)} + c_2x_n^{(2)}\}$ | $\{C_1X_k^{(1)} + C_2X_k^{(2)}\}$ |
| 2 | Conservarea simetriei pare | $x_n = x_{-n} = x_{N-n}$ | $X_k = X_{-k} = X_{N-k}$ |
| 3 | Conservarea simetriei impare | $x_n = -x_{-n} = -x_{N-n}$ | $X_k = -X_{-k} = -X_{N-k}$ |
| 4 | Simetria | $\{X_k\}$ | $\{Nx_{-n}\}$ |
| 5 | Paritatea şi imparitatea Re$\{X_k\}$ şi Im $\{X_k\}$ | $\{x_n\} \in \mathbb{R}$ | $X_k = X_{-k} = X^*_{N-k}$ |
| | | Re$\{x_n\} \equiv 0, \forall n$ | $X_k = -X^*_{-k} = -X_{N-k}$ |
| 6 | Schimbarea semnului variabilei | $\{x_{-n}\}$ | $\{X_{-k}\}$ |
| | | $\{x_n^*\}$ | $\{X^*_{-k}\}$ |
| 7 | Translaţia variabilei $n$ | $\{x_{n-m}\}$ | $\{w_N^{-k} X_k\}$ |
| 8 | Translaţia variabilei $k$ | $\{w_N^{mn} x_n\}$ | $\{X_{k-m}\}$ |
| 9 | Impuls unitate „discretizat" | $\delta_n = \begin{cases} 1, (n) = 0 \\ 0, (n) \neq 0 \end{cases}$ | 1 |
| 10 | Constantă unitară „discretizată" | $x_n = 1, \forall n$ | $N\delta_k = \begin{cases} N, (k) = 0 \\ 0, (k) \neq 0 \end{cases}$ |
| 11 | Convoluţie ciclică în $n$ | $\left\{\sum_{m=0}^{N-1} x_m^{(1)} x_{n-m}^{(2)}\right\}$ | $\{X_k^{(1)} X_k^{(2)}\}$ |
| 12 | Convoluţie ciclică în $k$ | $\{x_n^{(1)} x_n^{(2)}\}$ | $\left\{\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X_m^{(1)} X_{k-m}^{(2)}\right\}$ |
| 13 | Corelaţia ciclică | $\left\{\sum_{m=0}^{N-1} x_m^{(1)} x_{n+m}^{(2)}\right\}$ | $\{X_k^{(1)*} X_k^{(2)}\}$ |

Relaţia (4.155) se mai poate scrie:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x_m^{(1)} w_N^{-mk} \cdot x_{n-m}^{(2)} w_N^{-(n-m)k} = X_k^{(1)} X_k^{(2)}; \quad \text{q.e.d.} \qquad (4.156)$$

În acelaşi mod se pot demonstra relaţiile ce ilustrează proprietăţile 12 şi 13 din tabelul 4.2.



**Exemplul 4.9.** Se dă semnalul:

$$x_n = e^{-an}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad 0 < a < 1$$

Se cere $\mathcal{F}_d\{x_n\}$. Să se reprezinte grafic $Re\{X_k\}$ şi $Im\{X_k\}$ pentru $a = 0,5$, $N = 15$.

*Rezolvare*

Conform definiţiei (4.133) se găseşte expresia:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-an}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}}\right)^{-kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

care reprezintă o progresie geometrică a cărei sumă este:

$$X_k = \frac{1 - e^{-aN}}{1 - e^{-a} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

ceea ce ne dă: *TFD* $\{x_n\}$.

Separînd părţile reală şi imaginară din $X_k$ se găseşte:

$$ReX_k = \frac{(1 - e^{-aN})\left(1 - e^{-a}\cos\frac{2\pi}{N}k\right)}{1 - 2e^{-a}\cos\frac{2\pi}{N}k + e^{-2a}}$$

$$Im\,X_k = \frac{(1 - e^{-aN})\,e^{-a}\sin\frac{2\pi}{N}k}{1 - 2e^{-a}\cos\frac{2\pi}{N}k + e^{-2a}}$$

Pe figura 4.29 se arată graficele corespunzătoare pentru $a = 0,5$, $N = 15$.

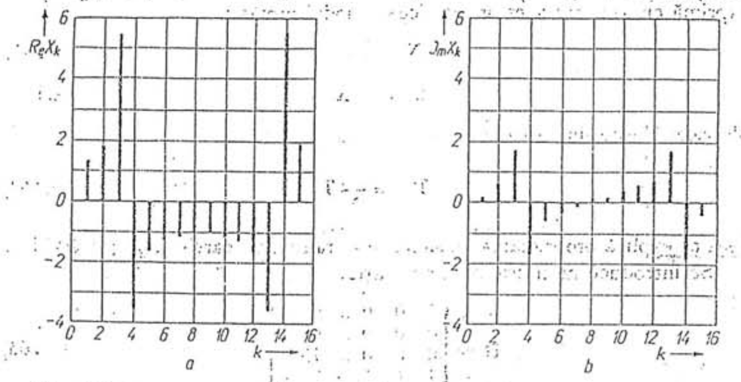
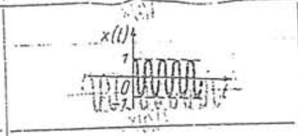
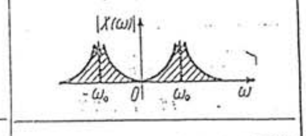
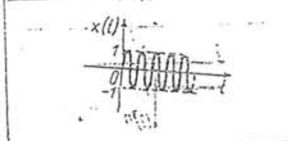
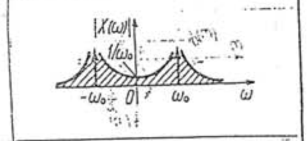
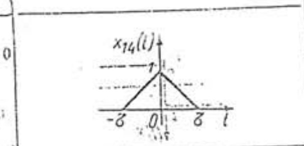
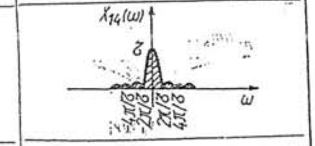
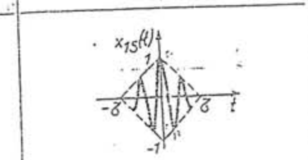
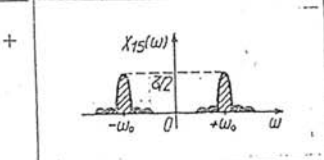
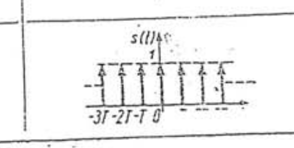
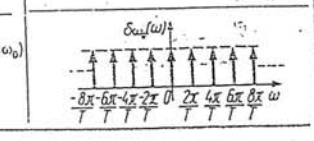



Fig. 4.29. Reprezentarea grafică a părţilor reală şi imaginară ale $X_k$ din exemplul 4.9.

TABELUL 3.1 (continuare)

| Nr. crt. | Expresia în timp | Graficul în timp | Expresia în frecvență | Reprezentarea spectrală |
|---|---|---|---|---|
| 12 | $x(t) = u(t)\cos\omega_0 t$ |  | $X(\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$ |  |
| 13 | $x(t) = u(t)\sin\omega_0 t$ |  | $X(\omega) = \frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)] + \frac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$ |  |
| 14 | $x_{14}(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau}+1, & t<0 \\ -\frac{t}{\tau}+1, & t>0 \end{cases}$ |  | $X_{14}(\omega) = \tau\,\mathrm{sinc}^2\frac{\omega\tau}{2}$ |  |
| 15 | $x_{15}(t) = x_{14}(t)\cos\omega_0 t$ |  | $X_{15}(\omega) = \frac{1}{2}[X_{14}(\omega+\omega_0) + X_{14}(\omega-\omega_0)]$ |  |
| 16 | $x(t) = \delta_T(t)$ |  | $\mathcal{F}\delta_T(t) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ |  |

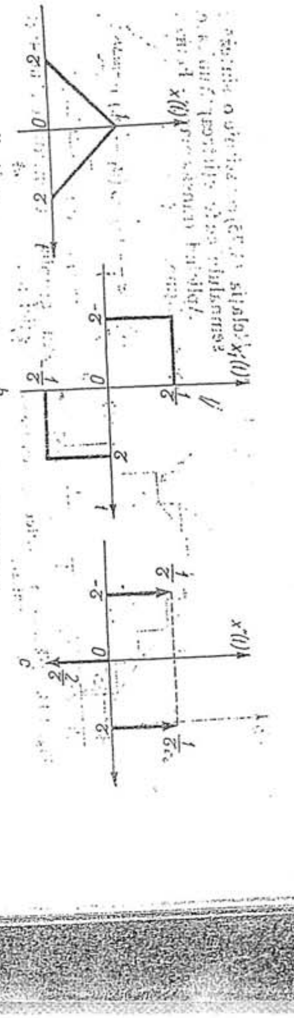


Fig. 3.12. Derivarea semnalului triunghiular.

Aplicînd proprietatea de eșantionare a funcției $\delta(t)$ se obține:

$$D_n = \frac{A}{T}(e^{jn\omega_0\tau/2} - e^{-jn\omega_0\tau/2})$$

Rezultă:

$$A_{nc} = \frac{D_n}{jn\omega_0} = \frac{A}{jn\omega_0 T}(e^{jn\omega_0\tau/2} - e^{-jn\omega_0\tau/2}) = \frac{A\tau}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right).$$

ca și în capitolul 2.

Calculul coeficienților seriei Fourier a unui semnal exprimat cu ajutorul impulsurilor unitate este foarte simplu, de aceea metoda prezentată este indicată pentru acele semnale, care prin derivări succesive conduc la impulsuri $\delta(t)$.

Exemplul 3.7. Să se determine funcția de densitate spectrală a semnalului $x(t)$ din figura 3.12, a.

Rezolvare. Prin două derivări succesive se ajunge la $x''(t)$ din figura 3.12, c, care se exprimă analitic astfel:

$$x''(t) = \frac{1}{\tau}[\delta(t+\tau) - 2\delta(t) + \delta(t-\tau)]$$

Deoarece $\mathcal{F}\cdot\delta(t) = 1$, aplicînd proprietatea de deplasare în timp obținem:

$$\mathcal{F}\{x''(t)\} = \frac{1}{\tau}(e^{j\omega\tau} - 2 + e^{-j\omega\tau}) = -\frac{4\sin^2\frac{\omega\tau}{2}}{\tau}$$

Utilizînd integrarea în timp rezultă:

$$X(\omega) = \frac{4\sin^2\frac{\omega\tau}{2}}{\tau\omega^2} = \tau\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

### 3.3.3. Utilizarea funcțiilor $u(t)$ și $\delta(t)$ în calculul transformatelor Fourier prin metode numerice

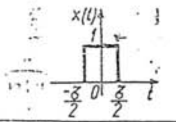
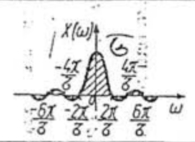
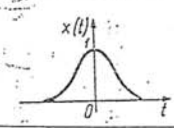
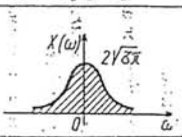
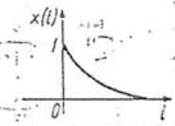
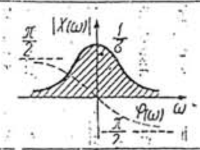
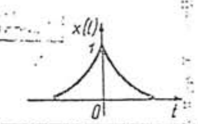
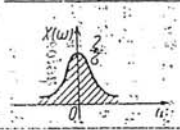
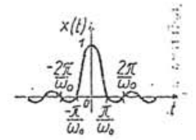
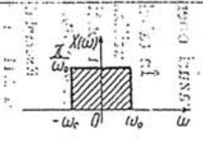
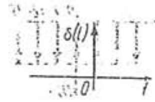
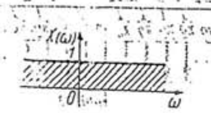
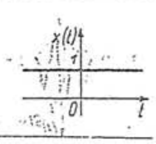
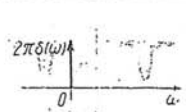
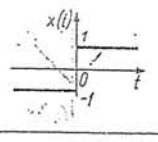
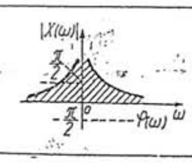
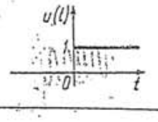
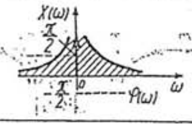
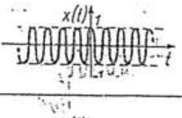
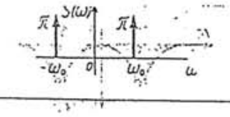
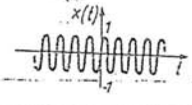
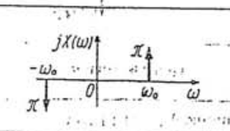
Aproximarea unui semnal $x(t)$ în trepte este arătată în figura 3.13. Cu notațiile din figură, $x(t)$ se exprimă astfel:

$$x(t) \approx a_0 u(\Delta t) + (a_1 - a_0)u(t - \Delta t) + (a_2 - a_1)u(t - 2\Delta t) + \dots \quad (3.75)$$

sinc ωt = sin ωt / ωt

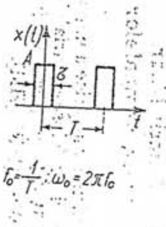
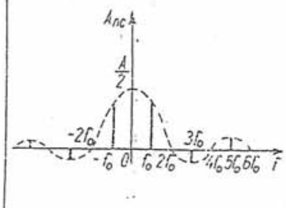
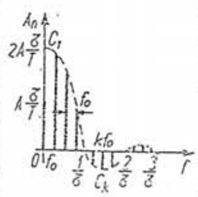
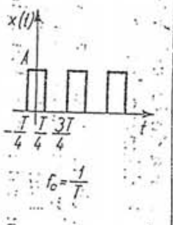
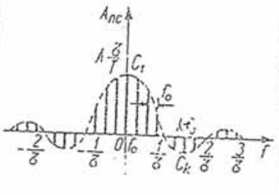
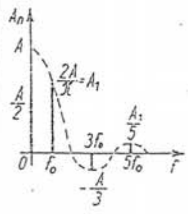
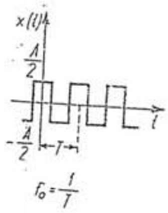
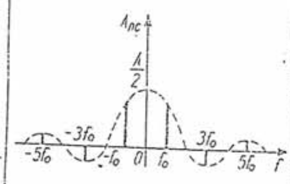
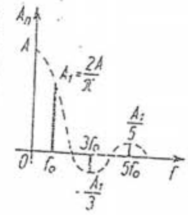
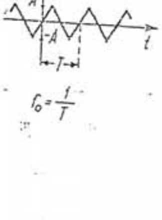
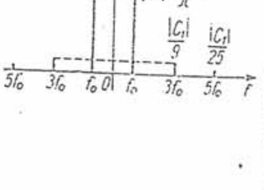
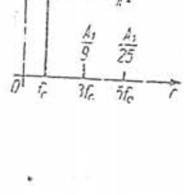


Reprezentarea în timp şi frecvenţă a unor semnale uzuale. TABELUL 3.1

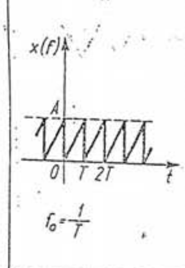
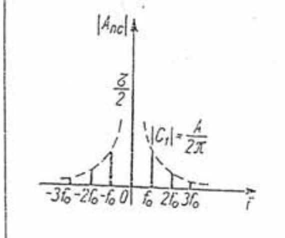
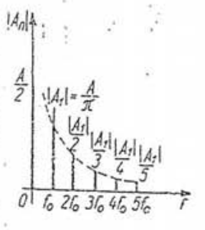
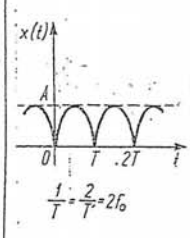
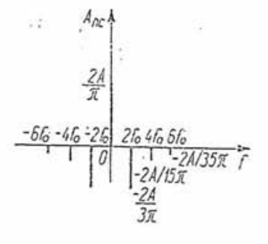
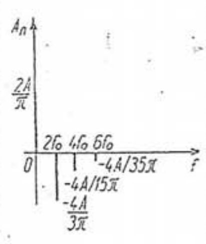
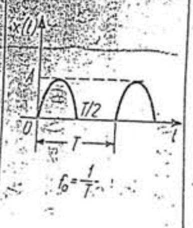
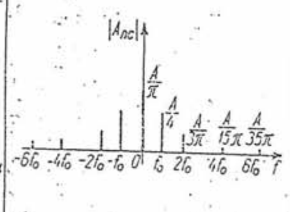
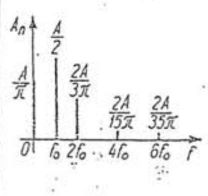
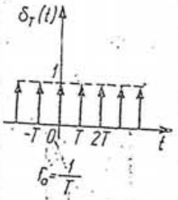
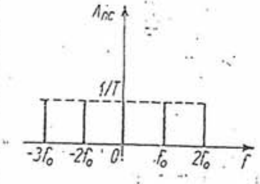
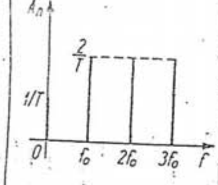
| Nr. crt. | Expresia în timp | Graficul în timp | Expresia în frecvenţă | Reprezentarea spectrală |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $x(t)=\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\\ 0, & \lvert t\rvert\geq\frac{\tau}{2}\end{cases}$ |  | $X(\omega)=\tau\,\mathrm{sinc}\,\frac{\omega\tau}{2}$ |  |
| 2 | $x(t)=e^{-(t/2\tau)^2}$ |  | $X(\omega)=2\sqrt{\tau\pi}\,e^{-\tau\omega^2}$ |  |
| 3 | $x(t)=\begin{cases}e^{-\tau t}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$ |  | $X(\omega)=\frac{1}{\tau+j\omega}$ |  |
| 4 | $x(t)=\begin{cases}e^{-\tau t}, & t>0\\ -e^{\tau t}, & t<0\end{cases}$ $\tau>0$ |  | $X(\omega)=\frac{2\tau}{\tau^2+\omega^2}$ |  |
| 5 | $x(t)=\mathrm{sinc}\,\omega_0 t$ |  | $X(\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_0}, & \lvert\omega\rvert<\omega_0\\ 0, & \lvert\omega\rvert>\omega_0\end{cases}$ |  |
| 6 | $x(t)=\delta(t)$ |  | $\mathcal{F}\delta(t)=1$ |  |
| 7 | $x(t)=1$ |  | $X(\omega)=2\pi\delta(\omega)$ |  |
| 8 | $x(t)=\mathrm{sgn}\,(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$ |  | $X(\omega)=\frac{2}{j\omega}$ |  |
| 9 | $x(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$ |  | $X(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$ |  |
| 10 | $x(t)=\cos\omega_0 t$ |  | $X(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$ |  |
| 11 | $x(t)=\sin\omega_0 t$ |  | $X(\omega)=\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$ |  |

TABELUL 2.2

Reprezentări în timp și în frecvență ale unor semnale periodice uzuale.

| Nr. | Expresie în timp (pe o perioadă) | Reprezentarea în domeniul timp | Seriile Fourier a) exponențială; b) armonică | Reprezentarea în domeniul frecvență $A_{nc}(f)$ | $A_n(f)$ | Denumirea tehnică |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x(t)=\begin{cases} A & \lvert t\rvert<\frac{\tau}{2} \\ 0 & \lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\end{cases}$ |  $f_0=\frac{1}{T};\ \omega_0=2\pi f_0$ | a) $x(t)=A\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{sinc}\frac{n\omega_0\tau}{2}e^{jn\omega_0 t}$ b) $x(t)=\frac{A\tau}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}2A\frac{\tau}{T}\text{sinc}\frac{n\omega_0\tau}{2}\cos n\omega_0 t$ |  |  | Funcție poartă |
| 2 | $x(t)=\begin{cases} A & \lvert t\rvert<\frac{T}{4} \\ 0 & \lvert t\rvert>\frac{T}{4}\end{cases}$ |  $f_0=\frac{1}{T}$ | a) $x(t)=\frac{A}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{sinc}\frac{n\pi}{2}e^{jn\omega_0 t}$ b) $x(t)=\frac{A}{2}+A\sum_{n=1}^{\infty}\text{sinc}\frac{n\pi}{2}\cos n\omega_0 t=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\left(\cos\omega_0 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_0 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_0 t-\dots\right)$ |  |  | Funcție poartă cu $\frac{\tau}{T}=\frac{1}{2}$ |
| 3 | $x(t)=\begin{cases} \frac{A}{2}, & \lvert t\rvert<\frac{T}{4} \\ -\frac{A}{2}, & \lvert t\rvert>\frac{T}{4}\end{cases}$ |  $f_0=\frac{1}{T}$ | a) $x(t)=\frac{A}{2}\sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty}\text{sinc}\frac{n\pi}{2}e^{jn\omega_0 t}$ b) $x(t)=A\sum_{n=1}^{\infty}\text{sinc}\frac{n\pi}{2}\cos n\omega_0 t=\frac{2A}{\pi}\left(\cos\omega_0 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_0 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_0 t-\dots\right)$ |  |  | Funcție de comutație |
| 4 | $x(t)=\begin{cases} \frac{4A}{T}, & \lvert t\rvert<\frac{T}{4} \\ -\frac{4A}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right), & \frac{T}{4}<t<\frac{3T}{4}\end{cases}$ |  $f_0=\frac{1}{T}$ | a) $x(t)=\frac{2A}{jn\pi}\sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty}\text{sinc}\frac{n\pi}{2}e^{jn\omega_0 t}$ b) $x(t)=\frac{8A}{\pi^2}\left(\sin\omega_0 t-\frac{1}{3^2}\sin 3\omega_0 t+\frac{1}{5^2}\sin 5\omega_0 t-\frac{1}{7^2}\sin 7\omega_0 t+\dots\right)$ |  |  | Funcția triunghiulară periodică |

*Tabelul 2.2.* (continuare)

| Nr. | Expresie în timp (pe o perioadă) | Reprezentarea în domeniul timp | Seriile Fourier a) exponențială; b) armonică | Reprezentarea în domeniul frecvență $A_{nc}(f)$ | $A_n(f)$ | Denumirea tehnică |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | $x(t) = \frac{A}{T}$ <br> $1 < t < T$ |   | a) $x(t) = \frac{A}{2} + j\frac{A}{2}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{jn\omega_0 t}$ <br> b) $x(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_0 t$ |   |   | Funcție în dinți de ferăstrău |
| 6 | $x(t) = A\sin\omega_0 t$ <br> $0 < t < T$ <br> $\omega_0 = \frac{2\pi}{T'}$ <br> $T' = 2T$ |   | a) $x(t) = -\frac{2A}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}e^{j2n\omega_0 t}$ <br> b) $x(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2n\omega_0 t$ |   |   | Sinusoidă redresată în dublă alternanță |
| 7 | $x(t) = A\sin\omega_0 t$ pentru $0 < t < \frac{T}{2}$; $0$ pentru $\frac{T}{2} < t < T$ |   | b) $x(t) = \frac{x_d(t) + A\sin\omega_0 t}{2} = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\sin\omega_0 t - \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2n\omega_0 t$ |   |   | Sinusoidă redresată în monoalternanță |
| 8 | $\delta_T(t)$ |   | a) $x(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$ <br> b) $x(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\omega_0 t$ |   |   | Funcția delta periodică |

$\delta_T(t) \xleftrightarrow{F} \Omega\,\delta_\Omega(\omega)$

DERIVAREA FUNCTIILOR COMPUSE +FORMULE TRIGONOMETRIE

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $(u^n)^{\mid} = nu^{n-1}u^{\mid}$ | 25 | $\cos^2x + \sin^2x = 1$ |
| 2 | $(\sqrt[n]{u}) = \frac{u^{\mid}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ | 26 | $sin(-x) = -sinx$ |
| 3 | $(lnu)^{\mid} = \frac{u^{\mid}}{u}$ | 27 | $\cos(-x) = \cos x$ |
| 4 | $(a^u)^{\mid} = u^{\mid}a^u\ln a$ | 28 | $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$=cosx |
| 5 | $(\sin u)^{\mid} = u^{\mid}\cos u$ | 29 | $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = sinx$ |
| 6 | $(\cos u)^{\mid} = -u^{\mid}\sin u$ | 30 | $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$ |
| 7 | $(tgu)^{\mid} = \frac{u^{\mid}}{\cos^2u}$ | 31 | $\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \sin b\cos a$ |
| 8 | $(ctgu)^{\mid} = \frac{-u^{\mid}}{\sin^2u}$ | 32 | $sin2a = 2sinacosa$ |
| 9 | $(\text{arcsinu})^{\mid} = \frac{u^{\mid}}{\sqrt{1-u^2}}$ | 33 | $\cos 2a = \cos^2a - \sin^2a = 2\cos^2a - 1$ |
| 10 | $(\text{arccosu})^{\mid} = \frac{-u^{\mid}}{\sqrt{1-u^2}}$ | 34 | $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3a$. |
| 11 | $(\text{arctgu})^{\mid} = \frac{u^{\mid}}{1+u^2}$ | 35 | $\cos 3a = 4\cos^3a - 3\cos a$ |
| 12 | $(\frac{f}{g})^{\mid} = \frac{f^{\mid}g-fg^{\mid}}{g^2}$ | 36 | $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$ |
| 13 | $(f^{-1}) = \frac{1}{f^{\mid}f^{-1}}$ | 37 | $\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$ |
| 14 | $(\lambda f)^{\mid} = f^{\mid}\lambda$ | 38 | $tgactga = 1$ |
| 15 | $(f \pm g)^{\mid} = f^{\mid} \pm g^{\mid}$ | 39 | $tg(a \pm b) = \frac{tga \pm tgb}{1 \mp tgatgb}$ |
| 16 | $(fg)^{\mid} = f^{\mid}g + fg^{\mid}$ | 40 | $tg2a = \frac{2tga}{1-tg^2a}$ |
| 17 | $\sin a\sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$ | 41 | $tg\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1+\cos a} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$ |
| 18 | $\sin a\cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$ | 42 | $\sin a = \frac{2tg\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$ |
| 19 | $\cos a\cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$ | 43 | $\cos a = \frac{1-tg^2\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$ |
| 20 | $\cos a\sin b = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$ | 44 | $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ |
| 21 | $\cos a = \frac{1}{2}(e^{ja} + e^{-ja})$ | 45 | $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ |
| 22 | $\sin a = \frac{1}{2j}(e^{ja} - e^{-ja})$ | 46 | $cosa + cosb = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ |
| 23 | $sha = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})$ | 47 | $cosa - cosb = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ |
| 24 | $cha = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$ | 48 | $tga \pm tgb = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a\cos b}$ |

## INTEGRALE CU FUNCTII COMPUSE

| | |
|---|---|
| 1 | $\int u^n(x)u'(x)dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}$ |
| 2 | $\int a^{u(x)}u'(x)dx = \frac{a^u}{\ln a}$ |
| 3 | $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln\lvert u\rvert$ |
| 4 | $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}$ |
| 5 | $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{u-a}{u+a}\rvert$ |
| 6 | $\int u'(x)\sin u(x)dx = -\cos u$ |
| 7 | $\int u'(x)\cos u(x)dx = \sin u(x)$ |
| 8 | $\int \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}dx = tg(u)$ |
| 9 | $\int \frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}dx = -ctg(u)$ |
| 10 | $\int u'(x)tg(u)dx = -\ln\lvert\cos u\rvert$ |
| 11 | $\int u'(x)ctg(u)dx = \ln\lvert\sin u\rvert$ |
| 12 | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-a^2}}dx = \ln\left\lvert u+\sqrt{u^2(x)-a^2}\right\rvert$ |
| 13 | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+a^2}}dx = \ln\left\lvert u+\sqrt{u^2(x)+a^2}\right\rvert$ |
| 14 | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2-u^2(x)}}dx = \arcsin\frac{u}{a}$ |
| 15 | $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ |
| 16 | $\int \cos^2 xdx = \frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{1}{2}x$ |
| 17 | $\int \sin^2 xdx = -\frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{1}{2}x$ |
| 18 | $\int \cos^2 axdx = \frac{\frac{1}{2}\cos ax\sin ax+\frac{1}{2}ax}{a}$ |
| 19 | $\int \sin^2 axdx = \frac{-\frac{1}{2}\cos ax\sin ax+\frac{1}{2}ax}{a}$ |
| 20 | $\int x\cos axdx = \frac{\cos ax+ax\sin ax}{a^2}$ |
| 21 | $\int x\sin axdx = \frac{\sin ax-ax\cos ax}{a^2}$ |
| 22 | $\int x^2\sin axdx = \frac{-a^2x^2\cos ax+2\cos ax+2ax\sin ax}{a^3}$ |
| 23 | $\int x^2\cos axdx = \frac{a^2x^2\sin ax-2\sin ax+2ax\cos ax}{a^3}$ |

| | |
|---|---|
| 24 | $\int x^2\sin xdx = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$ |
| 25 | $\int x^2\cos xdx = x^2\sin x - 2\sin x + 2x\cos x$ |
| 26 | $\int x\sin xdx = \sin x - x\cos x$ |
| 27 | $\int x\cos xdx = \cos x + x\sin x$ |
| 28 | $\int x^n\ln xdx = -\frac{1}{2n+1+n^2}x^{1+n} + \frac{1}{1+n}x^{1+n}\ln x$ |
| 29 | $\int \cos(\ln x)dx = \frac{1}{2}x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$ |
| 30 | $\int \ln xdx = x(\ln x - 1)$ |
| 31 | $\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln(tg\frac{x}{2})$ |
| 32 | $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = e^x - \ln(1+e^x)$ |
| 33 | $\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{b^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ab}$ |
| 34 | $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2b}e^{-ab}$ |
| 35 | $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(b^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4b^3}\sin ab - ab\cos ab$ |
| 36 | $\int_0^\infty \mathrm{sinc} xdx = \int_0^\infty \mathrm{sinc}^2 xdx = \frac{1}{2}$ |
| 37 | $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ |
| 38 | $\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ |
| 39 | $\int xe^{ax}dx = \frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$ |
| 40 | $\int xe^{ax^2}dx = \frac{1}{2a}e^{ax^2}$ |
| 41 | $\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{1}{b^2+a^2}e^{ax}[a\sin bx - b\cos bx]$ |
| 42 | $\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{b^2+a^2}e^{ax}[b\sin bx + a\cos bx]$ |
| 43 | $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}arctg\lvert\frac{bx}{a}\rvert$ |
| 44 | $\int \frac{x^2dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{x}{b^2} - \frac{a}{b^3}arctg\lvert\frac{bx}{a}\rvert$ |
| 45 | $\int \cos ax\sin bxdx = -\frac{1}{2}\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{1}{2}\frac{\cos(a-b)x}{a-b}$ |
| 46 | $\int \cos ax\cos bxdx = \frac{1}{2}\frac{\sin(a-b)x}{a-b} + \frac{1}{2}\frac{\sin(a+b)x}{a+b}$ |

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int x^2 e^{-ax} = -\frac{1}{a}x^2e^{-ax} - \frac{2}{a^2}xe^{-ax} - \frac{2}{a^3}e^{-ax}$$

$$\int x^2 e^{ax} = \frac{1}{a}x^2e^{ax} - \frac{2}{a^2}xe^{ax} + \frac{2}{a^3}e^{ax}$$

În timp ce $X(s)$ există în domeniul $\sigma > a$, pentru $a > 0$ şi pentru $a < 0$, $X(\omega)$ nu există pentru $a < 0$ deoarece în acest caz $x(t) \notin L_1$ şi $\mathcal{F}x(t)$ nu are sens.

### 3.6.3. Proprietăţi ale transformatelor Laplace

Transformatele Laplace posedă proprietăţi similare celor enunţate în paragraful 3.1 pentru transformatele Fourier. În tabelul 3.2 sînt prezentate principalele proprietăţi utile în aplicaţii. Acestea pot fi deduse prin demonstraţii

TABELUL 3.2

Proprietăţi ale transformatelor Laplace

| Nr. crt. | Proprietatea | Exprimare în timp | Exprimare în frecvenţa complexă |
|---|---|---|---|
| 1 | Liniaritate | $a_k x_k(t)$ | $a_k X_k(s)$ |
| 2 | Derivare în timp | $\frac{dx(t)}{dt}$ | $sX(s) - x(0^-)$ |
| 3 | Integrare în timp | $\int_0^t x(\tau)\,d\tau$ | $\frac{X(s)}{s} - \frac{x^{(-1)}(0^-)}{s}$ |
| 4 | Derivare în frecvenţă | $-tx(t)$ | $\frac{dX(s)}{ds}$ |
| 5 | Integrare în frecvenţă | $\frac{x(t)}{t}$ | $\int_0^{\infty} X(s)\,ds$ |
| 6 | Modificarea scărilor de reprezentare, $a \in \mathbb{R}$ | $x(at)$ | $\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| 7 | Deplasare în timp, $t_0 > 0$ | $x(t - t_0)$ | $X(s)\,e^{-st_0}$ |
| 8 | Deplasare în frecvenţă | $x(t)\,e^{s_0 t}$ | $X(s - s_0)$ |
| 9 | Convoluţia în timp | $x_1(t) \otimes x_2(t)$ | $X_1(s)\,X_2(s)$ |
| 10 | Convoluţia în frecvenţă | $x_1(t)\,x_2(t)$ | $\frac{1}{2\pi j}\,[X_1(s) \otimes X_2(s)]$ |

similare celor utilizate în demonstrarea proprietăţilor pentru $\mathcal{F}\{\cdot\}$. Datorită [...]tei inferioare $0^-$, din integrala care evaluează $\mathcal{L}\{\cdot\}$, proprietăţile de derivare şi de integrare în timp, conţin $x(0^-)$. În aplicarea proprietăţilor de integrare şi de derivare este necesar să se verifice, dacă prin integrare, respectiv derivare, se menţin condiţiile de existenţă ale transformatelor.

Proprietăţile enunţate în tabelul 3.2 pentru $\mathcal{L}\{\cdot\}$ se extind asupra transformatelor $\mathcal{L}_B\{\cdot\}$, cu precizările ce se impun de fiecare dată pentru limitele domeniului de convergenţă.

TABELUL 3.3

Transformatele Laplace ale unor semnale uzuale

| Nr. crt. | Semnalul (originalul) $x(t)$ | Transformata Laplace (imaginea) $X(s)$ |
|---|---|---|
| 1 | $x(t)$ | $X(s)=\int_0^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$ |
| 2 | $\delta(t)$ | $1$ |
| 3 | $\frac{d^n}{dt^n}\,\delta(t)$ | $s^n$ |
| 4 | $u(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| 5 | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| 6 | $\frac{t^n}{n!}$ | $\frac{1}{s^{n+1}}$ |
| 7 | $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| 8 | $\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$ | $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ |
| 9 | $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| 10 | $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| 11 | $\mathrm{sh}\, at$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ |
| 12 | $\mathrm{ch}\, at$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ |
| 13 | $e^{-at}\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(s^2+a^2)^2+\omega^2}$ |
| 14 | $e^{-at}\cos \omega t$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| 15 | $\frac{e^{-at}t^n}{n!}$ | $\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$ |
| 16 | $2e^{-at}(b\cos \omega t - c\sin \omega t)$ | $\frac{b+jc}{(s+a)-j\omega}+\frac{b-jc}{(s+a)+j\omega}$ |
| 17 | $1+\frac{b}{a-b}e^{-at}-\frac{a}{a-b}e^{-bt}$ | $\frac{ab}{s(s+a)(a+b)}$ |
| 18 | $e^{-at}(\omega\cos\omega t - a\sin\omega t)$ | $\frac{s\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ |

semnale numerice, proprietățile enumerate anterior și transformatele din tabelul 4.1 trebuie considerate cu $T = 1$.

TABELUL 4.1

Transformatele Z ale unor semnale uzuale

| Nr. crt. | Semnalul $x(t)$ cauzal | Transformata z, $X(z)$ | $R_c$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $x(t)$ | $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\, z^{-n}$ | $R_c$ |
| 2 | $\delta(t)$ | $1$ | $1$ |
| 3 | $u(t)$ | $\dfrac{z}{z-1}$ | $1$ |
| 4 | $\delta_T(t)$ | $\dfrac{z}{z-1}$ | $1$ |
| 5 | $t$ | $\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$ | $1$ |
| 6 | $\dfrac{1}{k!}\, t^k$ | $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{(-1)^k}{k!} \dfrac{\partial^k}{\partial a^k}\left(\dfrac{z}{z-e^{-aT}}\right)$ | $e^{-aT}$ |
| 7 | $a^{\frac{t}{T}}$ | $\dfrac{z}{z-a}$ | $\left\lvert a^{\frac{1}{T}} \right\rvert$ |
| 8 | $e^{-at}$ | $\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$ | $e^{-aT}$ |
| 9 | $\dfrac{t^k}{k!}\, e^{-at}$ | $\dfrac{(-1)^k}{k!} \dfrac{\partial^k}{\partial a^k}\left(\dfrac{z}{z-e^{-aT}}\right)$ | $e^{-aT}$ |
| 10 | $e^{-at} - e^{-bt}$ | $\dfrac{z}{z-e^{-aT}} - \dfrac{z}{z-e^{-bT}}$ | $\max\{e^{-aT}, e^{-bT}\}$ |
| 11 | $\sin \omega t$ | $\dfrac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$ | $1$ |
| 12 | $\cos \omega t$ | $\dfrac{z(z-\cos\omega T)}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$ | $1$ |
| 13 | $\operatorname{sh} at$ | $\dfrac{z \operatorname{sh} aT}{z^2 - 2z \operatorname{ch} aT + 1}$ | $1$ |
| 14 | $\operatorname{ch} aT$ | $\dfrac{z(z-\operatorname{ch} aT)}{z^2 - 2z\operatorname{ch} aT + 1}$ | $1$ |
| 15 | $e^{-at}\sin\omega t$ | $\dfrac{z e^{-aT}\sin\omega T}{z^2 - 2z e^{-aT}\cos\omega T + e^{-2aT}}$ | $e^{-aT}$ |
| 16 | $e^{-at}\cos\omega t$ | $\dfrac{z^2 - z e^{-aT}\cos\omega T}{z^2 - 2z e^{-aT}\cos\omega T + e^{-2aT}}$ | $e^{-aT}$ |
| 17 | $1 + \dfrac{b}{a-b} e^{-at} - \dfrac{a}{a-b} e^{-bt}$ | $\dfrac{z}{z-1} + \dfrac{bz}{(a-b)(z-e^{-aT})} - \dfrac{az}{(a-b)(z-e^{-bT})}$ | $\max\{e^{-aT}, e^{-bT}\}$ |
| 18 | $e^{-at}(\omega\cos\omega t - a\sin\omega t)$ | $\dfrac{\omega z^2 - z e^{-aT}(\omega\cos\omega T + a\sin\omega T)}{z^2 - 2z e^{-aT}\cos\omega T + e^{-2aT}}$ | $e^{-aT}$ |



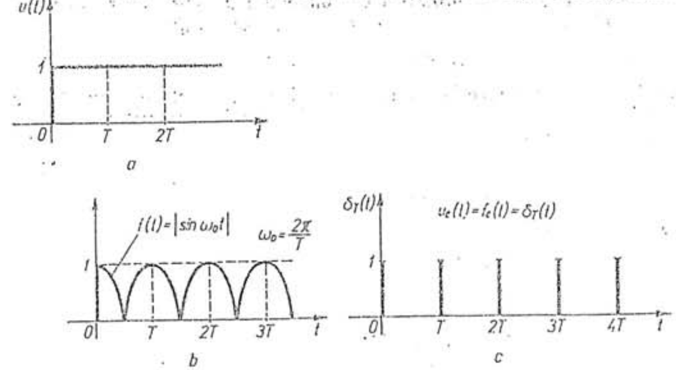



Fig. 4.23. Exemple de funcții cu aceeași transformată z.

În tabelul 4.1, funcțiile de la pozițiile 3 și 4 au aceeași transformată z. Aceasta ilustrează faptul că $\mathcal{Z}x(t)$ *ne informează numai asupra valorilor* $x(nT)$ și nu ne indică nimic privind valorile funcției $x(t)$ pentru momente diferite de cele de eșantionare. Astfel, de exemplu funcțiile din figura 4.23, *a* și *b* conduc prin eșantionare la aceeași secvență de valori $\{x(nT)\}$ având transformata z, $X(z) = \dfrac{z}{z-1}$.

### 4.3.3. Convoluția semnalelor eșantionate (numerice)

Fie perechile de transformate $\mathcal{Z}x_1(t) = X_1(z)$ și $\mathcal{Z}x_2(t) = X_2(z)$ și fie produsul lor $X(z) = X_1(z)X_2(z)$. Să exprimăm $\mathcal{Z}^{-1}X(z)$ prin $Z^{-1}X_1(z)$ și $\mathcal{Z}^{-1}X_2(z)$. Fie:

$$X_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(kT)\, z^{-k}, \text{ cu } R_c = R_{c1};\; X_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x_2(mT)\, z^{-m}, \text{ cu } R_c = R_{c2}. \tag{4.94}$$

$$X(z) = X_1(z)\, X_2(z) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} x_1(kT)\, z^{-k}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty} x_2(mT)\, z^{-m}\right] \tag{4.95}$$

converge în $R_c = \max\{R_{c1}, R_{c2}\}$

Inversînd ordinea de sumare se obține:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\sum_{k=0}^{n} x(kT)\, x_2[(n-k)T]\right\} z^{-n} \tag{4.96}$$

Suma interioară:

$$\{x(nT)\} = \sum_{k=0}^{n} x_1(kT)\, x_2[(n-k)\,T] \tag{4.97}$$

corespunde transformatei z inverse: $\mathcal{Z}^{-1}X(z)$:

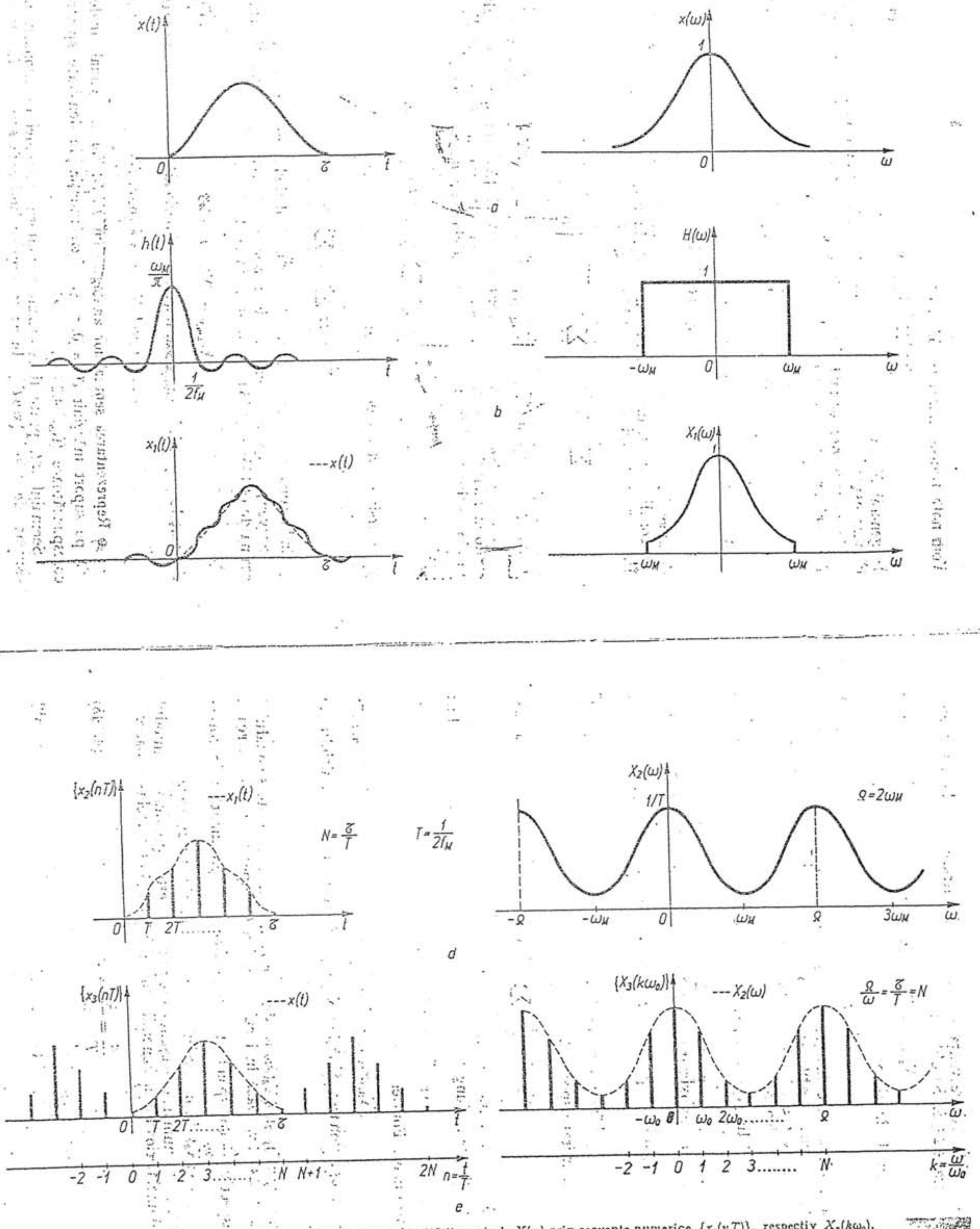



Fig. 4.28. Etapele aproximării semnalului $x(t)$ şi a densităţii spectrale $X(\omega)$ prin secvenţe numerice $\{x_3(nT)\}$, respectiv $X_3(k\omega_0)$.

# DERIVAREA Şi INTEGRAREA FUNCȚIILOR COMPUSE. FORMULE TRIGONOMETRIE

| | |
|---|---|
| 1 | $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ |
| 2 | $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ |
| 3 | $\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$ |
| 4 | $\left(a^n\right)' = a^u \cdot u'$ |
| 5 | $\left(\sin u\right)' = u' \cdot \cos u$ |
| 6 | $\left(\cos u\right)' = -u' \cdot \sin u$ |
| 7 | $\left(\tan u\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ |
| 8 | $\left(ctg\, u\right)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$ |
| 9 | $\left(\arcsin u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| 10 | $\left(\arccos u\right)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| 11 | $\left(\arctan u\right)' = -\frac{u'}{1+u^2}$ |
| 12 | $\left(fg\right)' = f'g + fg'$ |
| 13 | $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ |
| 14 | $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \cdot f^{-1}}$ |
| 15 | $\left(\lambda f\right)' = \lambda f'$ |
| 16 | $\left(f \pm g\right)' = f' \pm g'$ |
| 17 | $\int u^n(x)u'(x)dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}$ |
| 18 | $\int a^{u(x)}u'(x)dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a}$ |
| 19 | $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln\lvert u(x)\rvert$ |
| 20 | $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)+a^2}dx = \frac{1}{a} arctg \frac{u(x)}{a}$ |
| 21 | $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u(x)-a}{u(x)+a}\right\rvert$ |
| 22 | $\int u'(x)\sin u(x)dx = -\cos u(x)$ |
| 23 | $\int u'(x)\cos u(x)dx = \sin u(x)$ |
| 24 | $\int \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}dx = \tan\left(u(x)\right)$ |
| 25 | $\int \frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}dx = -ctg\left(u(x)\right)$ |
| 26 | $\int u'(x)\tan u(x)dx = -\ln\lvert\cos u(x)\rvert$ |
| 27 | $\int u'(x)ctg\left(u(x)\right)dx = \ln\lvert\sin u(x)\rvert$ |
| 28 | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-a^2}}dx = \ln\left\lvert u(x)+\sqrt{u^2(x)-a^2}\right\rvert$ |
| 29 | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+a^2}}dx = \ln\left\lvert u(x)+\sqrt{u^2(x)+a^2}\right\rvert$ |
| 30 | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2-u^2(x)}}dx = \arcsin\frac{u(x)}{a}$ |
| 31 | $\int f(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ |
| 32 | $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{1}{2}x$ |
| 33 | $\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{1}{2}x$ |
| 34 | $\int \cos^2 ax dx = \frac{\frac{1}{2}\cos ax\sin ax + \frac{1}{2}ax}{a}$ |
| 35 | $\int \sin^2 ax dx = \frac{-\frac{1}{2}\cos ax\sin ax + \frac{1}{2}ax}{a}$ |
| 36 | $\int x\cos ax dx = \frac{\cos ax + ax\sin ax}{a^2}$ |
| 37 | $\int x\sin ax dx = \frac{\sin ax - ax\cos ax}{a^2}$ |
| 38 | $\int x^2\sin ax dx = \frac{-a^2x^2\cos ax + 2\cos ax + 2ax\sin ax}{a^3}$ |
| 39 | $\int x^2\cos ax dx = \frac{a^2x^2\sin ax - 2\sin ax + 2ax\cos ax}{a^3}$ |
| 40 | $\int x^2\sin x dx = \left(2-x^2\right)\cos x + 2x\sin x$ |
| 41 | $\int x^2\cos x dx = x^2\sin x - 2\sin x + 2x\cos x$ |
| 42 | $\int x\sin x dx = \sin x - x\cos x$ |
| 43 | $\int x\cos x dx = \cos x + x\sin x$ |
| 44 | $\int x^n\ln x dx = -\frac{1}{n^2+2n+1}x^{n+1} + \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x$ |
| 45 | $\int \cos\left(\ln x\right)dx = \frac{1}{2}x\left[\sin\left(\ln x\right) + \cos\left(\ln x\right)\right]$ |
| 46 | $\int \ln x dx = x\left(\ln x - 1\right)$ |
| 47 | $\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$ |
| 48 | $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = e^x - \ln\left(1+e^x\right)$ |

| | |
|---|---|
| 49 | $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin ax}{b^2+a^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-ab}$ |
| 50 | $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2b}e^{-ab}$ |
| 51 | $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{\left(b^2+x^2\right)^2}dx=\frac{\pi}{4b^3}\sin ab-ab\cos ab$ |
| 52 | $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx=\frac{1}{2}$ |
| 53 | $\int\limits_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ |
| 54 | $\int\limits_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx=\frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ |
| 55 | $\int xe^{ax}dx=\frac{1}{a^2}e^{ax}\left(ax-1\right)$ |
| 56 | $\int xe^{ax^2}dx=\frac{1}{2a}e^{ax^2}$ |
| 57 | $\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{1}{b^2+a^2}e^{ax}\left[a\sin bx-b\cos bx\right]$ |
| 58 | $\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{b^2+a^2}e^{ax}\left[b\sin bx+a\cos bx\right]$ |
| 59 | $\int \frac{1}{a^2+b^2x^2}dx=\frac{1}{ab}\arctan\left\|\frac{bx}{a}\right\|$ |
| 60 | $\int \frac{x^2}{a^2+b^2x^2}dx=\frac{x}{b^2}-\frac{a}{b^3}\arctan\left\|\frac{bx}{a}\right\|$ |
| 61 | 45<br>$\int \cos ax\sin bxdx=-\frac{1}{2}\frac{\cos(a+b)x}{a+b}+\frac{1}{2}\frac{\cos(a-b)x}{a-b}$ |
| 62 | $\int \cos ax\cos bxdx=\frac{1}{2}\frac{\sin(a-b)x}{a-b}+\frac{1}{2}\frac{\sin(a+b)x}{a+b}$ |
| 63 | $\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ |
| 64 | $\int x^2e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}x^2e^{-ax}-\frac{2}{a^2}xe^{-ax}-\frac{2}{a^3}e^{-ax}$ |
| 65 | $\int x^2e^{ax}dx=\frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a^2}xe^{ax}+\frac{2}{a^3}e^{ax}$ |
| 66 | $\sin a\cdot\sin b=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$ |
| 67 | $\sin a\cdot\cos b=\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$ |
| 68 | $\cos a\cdot\sin b=\frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$ |
| 69 | $\cos a\cdot\cos b=\frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$ |
| 70 | $\sin a=\frac{1}{2}\left(e^{ja}-e^{-ja}\right)$ |
| 71 | $\cos a=\frac{1}{2}\left(e^{ja}+e^{-ja}\right)$ |

| | |
|---|---|
| 72 | $sha=\frac{1}{2}\left(e^a-e^{-a}\right)$ |
| 73 | $cha=\frac{1}{2}\left(e^a+e^{-a}\right)$ |
| 74 | $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ |
| 75 | $\sin(-x)=-\sin x$ |
| 76 | $\cos(-x)=\cos x$ |
| 77 | $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ |
| 78 | $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ |
| 79 | $\cos\left(a\pm b\right)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$ |
| 80 | $\sin\left(a\pm b\right)=\sin a\cos b\pm\sin b s\cos a$ |
| 81 | $\sin 2a=2\sin a\cos a$ |
| 82 | $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1$ |
| 83 | $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$ |
| 84 | $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$ |
| 85 | $\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$ |
| 86 | $\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$ |
| 87 | $\tan a\cdot ctga=1$ |
| 88 | $\tan\left(a\pm b\right)=\frac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}$ |
| 89 | $\tan\left(2a\right)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ |
| 90 | $tg\frac{a}{2}=\frac{\sin a}{1+\cos a}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$ |
| 91 | $\sin a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$ |
| 92 | $\cos a=\frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$ |
| 93 | $\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ |
| 94 | $\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ |
| 95 | $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ |
| 96 | $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ |
| 97 | $\tan a\pm\tan b=\frac{\sin\left(a\pm b\right)}{\cos a\cos b}$ |

# Transformata Fourier

## Original | Transformata Fourier

| | Original | Transformata Fourier |
|---|---|---|
| 1 | $x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ | $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ |
| 2 | $ax(t)+by(t)$ | $aX(j\omega)+bY(j\omega)$ |
| 3 | $\frac{dx(t)}{dt}$ | $j\omega X(j\omega)$ |
| 4 | $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ | $s^n X(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}X^{k-1}(0)$ |
| 5 | $x\left(t\pm t_0\right)$ | $X(j\omega)e^{\pm j\omega t_0}$ |
| 6 | $x\left(t\right)e^{\pm j\omega_0 t}$ | $X(\omega\pm\omega_0)$ |
| 7 | $x(at)$ | $\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$ |
| 8 | $\int_{-\infty}^{t}x(t)dt$ | $\frac{X(j\omega)}{j\omega}$ |
| 9 | $x(t)y(t)$ | $X(j\omega)*Y(j\omega)$ |
| 10 | $\int_{0}^{t}x(t_0)y\left(t-t_0\right)dt_0=x(t)*y(t)$ | $X(j\omega)Y(j\omega)$ |
| 11 | $x(t)\cos\omega_0 t$ | $\frac{1}{2}X\left(\omega-\omega_0\right)+\frac{1}{2}X\left(\omega+\omega_0\right)$ |
| 12 | $x(t)\sin\omega_0 t$ | $\frac{1}{2j}X\left(\omega-\omega_0\right)-\frac{1}{2j}X\left(\omega+\omega_0\right)$ |
| 13 | $\delta(t)$ | $1$ |
| 14 | $\sigma(t)$ | $\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$ |
| 15 | $X(t)$ | $2\pi x\left(-\omega\right)$ |
| 16 | $\int\left\lvert f\left(t\right)\right\rvert^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int\left\lvert F\left(\omega\right)\right\rvert^2 d\omega$ formula Parceval | |
| 17 | $\sigma(t-t_1)-\sigma(t-t_2)$ | $\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega t_1}-e^{-j\omega t_2}\right)$ |
| 18 | $e^{\alpha t}\sigma(t)$ | $\frac{1}{\left(j\omega-\alpha\right)}$ |
| 19 | $e^{\alpha t}\sigma(t-t_1)$ | $\frac{e^{(\alpha-j\omega)t_1}}{\left(j\omega-\alpha\right)}$ |
| 20 | $e^{-\alpha t}\sigma(-t)$ | $\frac{-1}{\left(j\omega+\alpha\right)}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 21 | $e^{-\alpha\|t\|}\sigma(t)$ | $\dfrac{2\alpha}{\left(\omega^2+\alpha^2\right)}$ |
| 22 | $t^k e^{-\alpha t}\sigma(t)$ | $\dfrac{k!}{\left(j\omega+\alpha\right)^{k+1}}$ |
| 23 | $\dfrac{1}{t-t_1}$ | $j\pi e^{j\omega t_1}\left[1-2\sigma(\omega)\right]$ |
| 24 | $\dfrac{1}{\left(t-t_1\right)^n}$ | $j\pi e^{j\omega t_1}\dfrac{\left(-j\omega\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!}\left[1-2\sigma(\omega)\right]$ |
| 25 | $e^{-\alpha t^2}$ | $\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}}$ |
| 26 | $\cos\omega_0 t$ | $\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\pi\delta\left(\omega+\omega_0\right)$ |
| 27 | $\sin\omega_0 t$ | $j\pi\delta\left(\omega+\omega_0\right)-j\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)$ |
| 28 | $\sigma\left(t\right)\cos\omega_0 t$ | $\dfrac{\pi}{2}\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\dfrac{\pi}{2}\delta\left(\omega+\omega_0\right)+j\dfrac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$ |
| 29 | $\sigma\left(t\right)\sin\omega_0 t$ | $\dfrac{\pi}{2j}\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\dfrac{\pi}{2j}\delta\left(\omega+\omega_0\right)+\dfrac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$ |
| 30 | $e^{-\alpha t}\sigma\left(t\right)\sin\omega_0 t$ | $\dfrac{\omega_0}{\omega_0{}^2-\omega^2+2\alpha j\omega+\alpha^2}$ |
| 31 | $e^{-\alpha t}\sigma\left(t\right)\cos\omega_0 t$ | $\dfrac{\alpha+j\omega}{\omega_0{}^2-\omega^2+2\alpha j\omega+\alpha^2}$ |

# Transformata Laplace unilaterală

**Original** **Transformata Laplace**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} X(s)e^{st}ds$ | $X(s)=\int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$ |
| 2 | $ax(t)+by(t)$ | $aX(s)+bY(s)$ |
| 3 | $\frac{dx(t)}{dt}$ | $sX(s)-X(0)$ |
| 4 | $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ | $s^n X(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} X^{k-1}(0)$ |
| 5 | $\int_0^t x(t)dt$ | $\frac{X(s)}{s}$ |
| 6 | $\underbrace{\int\ldots\int}_{n} x(t)dt$ | $\frac{X(s)}{s^n}$ |
| 7 | $(-t)^n x(t)$ | $\frac{d^n X(s)}{ds^n}$ |
| 8 | $\frac{1}{t}x(t)$ | $\int_0^{\infty} X(s)ds$ |
| 9 | $x(at)$ | $\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| 10 | $x(t-t_0)$ | $X(s)e^{-st_0}$ |
| 11 | $x(t)e^{\pm at}$ | $X(s\mp a)$ |
| 12 | $\int_0^t x(t_0)y(t-t_0)dt_0 = x(t)*y(t)$ | $X(s)Y(s)$ |
| 13 | $x(t)y(t)$ | $X(s)*Y(s)$ |
| 14 | $\sigma(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| 15 | $x(t)\cos\omega_0 t$ | $\frac{1}{2}X(s-j\omega_0)+\frac{1}{2}X(s+j\omega_0)$ |
| 16 | $x(t)\sin\omega_0 t$ | $\frac{1}{2j}X(s-j\omega_0)-\frac{1}{2j}X(s+j\omega_0)$ |
| 17 | $\delta(t)$ | $1$ |
| 18 | $\sigma(t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ | $\frac{1}{s^n}$ |
| 19 | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}\sigma(t)$ | $\frac{1}{(s+\alpha)^n}$ |
| 20 | $\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\sigma(t)$ | $\frac{s\cos\varphi_0-\omega_0\sin\varphi_0}{s^2+\omega_0^2}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 21 | $e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t\sigma(t)$ | $\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$ |
| 22 | $e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\sigma(t)$ | $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$ |
| 23 | $\sigma(t)\,\mathrm{c}h\omega_0 t$ | $\frac{s}{s^2-\omega_0^2}$ |
| 24 | $\sigma(t)sh\omega_0 t$ | $\frac{\omega_0}{s^2-\omega_0^2}$ |
| 25 | $e^{-\alpha t}\,\mathrm{c}h\omega_0 t\sigma(t)$ | $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2-\omega_0^2}$ |
| 26 | $e^{-\alpha t}sh\omega_0 t\sigma(t)$ | $\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2-\omega_0^2}$ |
| 27 | $\sigma(t)-\sigma(t-t_0)$ | $\frac{1}{s}\left(1-e^{-t_0 s}\right)$ |
| 28 | $\sigma(t-t_1)-\sigma(t-t_2)$ | $\frac{1}{s}\left(e^{-t_1 s}-e^{-t_2 s}\right)$ |
| 29 | $e^{\alpha t}\sigma(t-\tau)$ | $\frac{e^{-\tau(s-\alpha)}}{s-\alpha}$ |
| 30 | $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| 31 | $t^{-\frac{1}{2}}$ | $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$ |
| 32 | $t^{\frac{1}{2}}$ | $\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$ |

# Transformata Z

| | **Original** | **Transformata Z** |
|---|---|---|
| 1 | $x[n]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} X(z)z^{n-1}dz$ | $Z\{x[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$ |
| 2 | $ax[n]+by[n]$ | $ax(z)+by(z)$ |
| 3 | $x(n-kT)$ | $z^{-k}X(z)$ |
| 4 | $e^{-\alpha n}x[n]$ | $X(ze^{\alpha t})$ |
| 5 | $nx[n]$ | $-Tz\frac{dX(z)}{dz}$ |
| 6 | $a^n x[n]$ | $X\left(\frac{z}{aT}\right)$ |
| 7 | $\delta[n]$ | $1$ |
| 8 | $\sigma[n]$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| 9 | $n\sigma[n]$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ |
| 10 | $n^2\sigma[n]$ | $\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$ |
| 11 | $e^{-\alpha n}\sigma[n]$ | $\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$ |
| 12 | $n^k e^{-\alpha n}\sigma[n]$ | $(-1)^k\frac{d^k}{d\alpha^k}\left(\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}\right)$ |
| 13 | $ne^{-\alpha n}\sigma[n]$ | $T\frac{ze^{-\alpha T}}{(z-e^{-\alpha T})^2}$ |
| 14 | $\sin\omega n$ | $\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$ |
| 15 | $\cos\omega n$ | $\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$ |
| 16 | $e^{-\alpha n}\sin\omega n$ | $\frac{ze^{-\alpha T}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\omega T+e^{-2\alpha T}}$ |
| 17 | $e^{-\alpha n}\cos\omega n$ | $\frac{z^2-ze^{-\alpha T}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\omega T+e^{-2\alpha T}}$ |