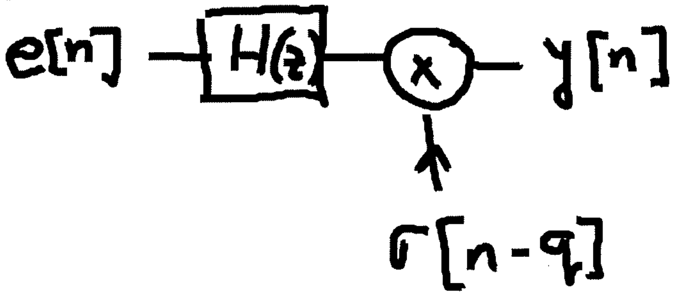
Concurs profesional “Tudor Tănăsescu”/SCS, faza locală 2007

1. (1.5p) Se consideră sistemul



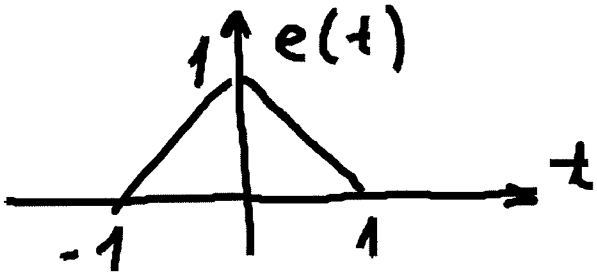
unde $H(z)=\dfrac{z}{z-a}$ şi $e[n]=\sigma[n]-A\sigma[n-p]+(A-1)\sigma[n-q]$ $\quad 1<p<q$

Să se determine condiţia ca răspunsul sistemului, y[n] să fie nul.

2. (1.5p) Se consideră sistemul algebric descris de relaţia $y=a_0+a_1e+a_2e^2+\ldots+a_ke^k$

Să se determine frecvenţa de eşantionare minimă necesară pentru refacerea semnalului y(t) din eşantioanele sale dacă e(t) este un semnal de bandă limitată Ω_0.

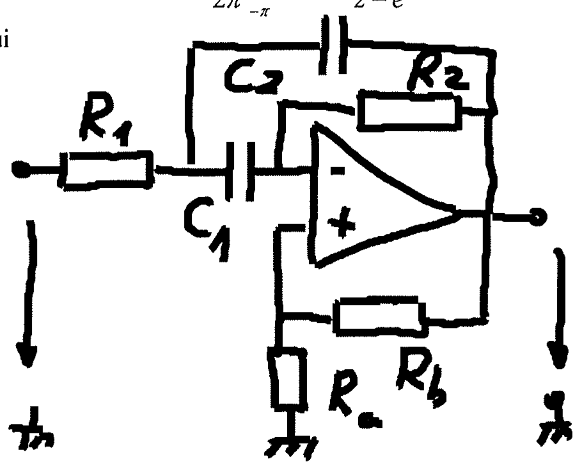
3. (1.5p) Să se determine răspunsul sistemului cu fdt $H(s)=\dfrac{\alpha}{s+\alpha}$ la semnalul



4. (1.5p) Să se determine valoarea integralei $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 at}{t^2}dt$

5. (1.5p) Arătaţi că dacă $F(e^{j\omega})=\sum_0^{\infty}f[n]e^{-jn\omega}$ atunci $F(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}F(e^{j\omega})\frac{z}{z-e^{j\omega}}d\omega \quad |z|>1$

6. (1.5p) Determinaţi funcţia de transfer a circuitului



1 punct din oficiu

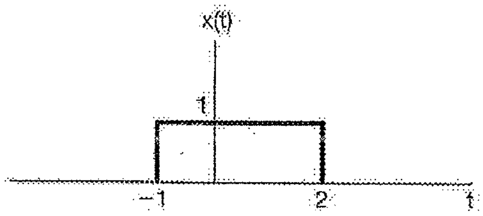
LOCALA 2006

1. Discutați corectitudinea sau incorectitudinea afirmațiilor
a. Dacă x[n]=0 pentru $n<N_1$ și h[n]=0 pentru $n<N_2$ atunci x[n]*h[n]=0 pentru $n<N_1+N_2$.
b. Dacă y[n]=x[n]*h[n] atunci y[n-1]=x[n-1]*h[n-1]
c. Dacă y(t)=x(t)*h(t) atunci y(-t)=x(-t)*h(-t).
Precizați răspunsurile corecte.

2. Fie sistemul liniar și invariant în timp descries de relația

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2)\, d\tau.$$

Determinați funcția pondere (răspunsul la impuls) a sistemului și răspunsul la excitația



3. Fie un sistem discret liniar descris de răspunsul la impuls

$$h[n] = (n+1)\alpha^n u[n].$$

unde $|\alpha|<1$. Determinați răspunsul indicial (la treapta unitate) al sistemului.

4. Fie sistemul liniar descries de ecuația diferențială

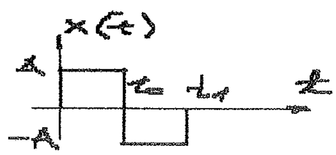
$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt}.$$

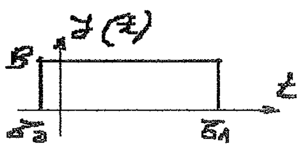
Arătați că

$$y(t) = A\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, d\tau + Bx(t) + C\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau,$$

și determinați constantele A, B și C.
Arătați că sistemul poate fi reprezentat ca o conexiune în cascadă a două sisteme și determinați relațiile intrare-ieșire ale acestora în domeniul timp.
Determinați grafurile de semnal ale celor două sisteme precum și grafurile conexiunilor în cascadă ale celor două subsisteme.

5. Semnalele x(t) și y(t) sunt înmulțite cu semnalul m(t) care satisface condiția $m(t-t_0)=m(t+t_0)$. În ce condiții transformatele Fourier ale semnalelor m(t)x(t) și m(t)y(t) sunt ortogonale?

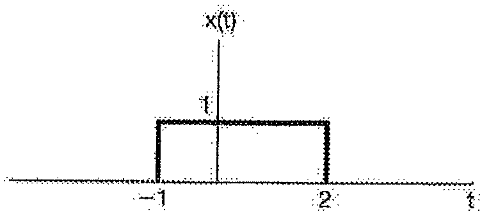




2. Fie sistemul liniar şi invariant în timp descries de relaţia

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2)\, d\tau.$$

Determinaţi funcţia pondere (răspunsul la impuls) a sistemului şi răspunsul la excitaţia



(a) Note that

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t-2} e^{-(t-2-\tau')} x(\tau')\, d\tau'.$$

Therefore,

$$h(t) = e^{-(t-2)} u(t-2).$$

(b) We have

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau)\, d\tau \\ &= \int_{2}^{\infty} e^{-(\tau-2)} [u(t-\tau+1) - u(t-\tau-2)] \end{aligned}$$

$h(\tau)$ and $x(t-\tau)$ are as shown in the figure below.
Using this figure, we may write

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \int_{2}^{t+1} e^{-(\tau-2)} d\tau = 1 - e^{-(t-1)}, & 1 < t < 4 \\ \int_{t-2}^{t+1} e^{-(\tau-2)} d\tau = e^{-(t-4)}[1 - e^{-3}], & t > 4 \end{cases}$$

3. Fie un sistem discret liniar descris de răspunsul la impuls

$$h[n] = (n+1)\alpha^n u[n].$$

unde |α|<1. Determinaţi răspunsul indicial (la treapta unitate) al sistemulubbni.

2.52. We get

$$s[n] = h[n] * u[n] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} (k+1)\alpha^k, & n \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Noting that

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)\alpha^k = \frac{d}{d\alpha} \sum_{k=0}^{n+1} \alpha^k = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1 - \alpha^{n+2}}{1 - \alpha} \right],$$

we get

$$\begin{aligned} s[n] &= \left[\frac{1 - (n+2)\alpha^{n+1}}{1 - \alpha} + \frac{1 - \alpha^{n+2}}{(1 - \alpha^2)} \right] u[n] \\ &= \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\alpha^n + \frac{\alpha}{1-\alpha}(n+1)\alpha^n \right] u[n]. \end{aligned}$$

4. Fie sistemul liniar descries de ecuaţia diferenţială

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt}.$$

Arătaţi că

$$y(t) = A\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau + Bx(t) + C\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau,$$

şi determinaţi constantele A, B şi C.
Arătaţi că sistemul poate fi reprezentat ca o conexiune în cascadă a două sisteme şi determinaţi relaţiile intrare-ieşire ale acestora în domeniul timp.
Determinaţi grafurile de semnal ale celor două sisteme precum şi grafurile conexiunilor în cascadă ale celor două subsisteme.

(a) Integrating the given differential equation once and simplifying, we get

$$y(t) = -\frac{a_0}{a_1}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau + \frac{b_0}{a_1}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau + \frac{b_1}{a_1}x(t).$$

Therefore, $A = -a_0/a_1$, $B = b_1/a_1$, $C = b_0/a_1$.

(b) Realizing that $x_2(t) = y_1(t)$, we may eliminate these from the two given integral equations. This would give us

$$y_2(t) = A\int_{-\infty}^{t} y_2(\tau)d\tau + B\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau + Cx_1(t).$$

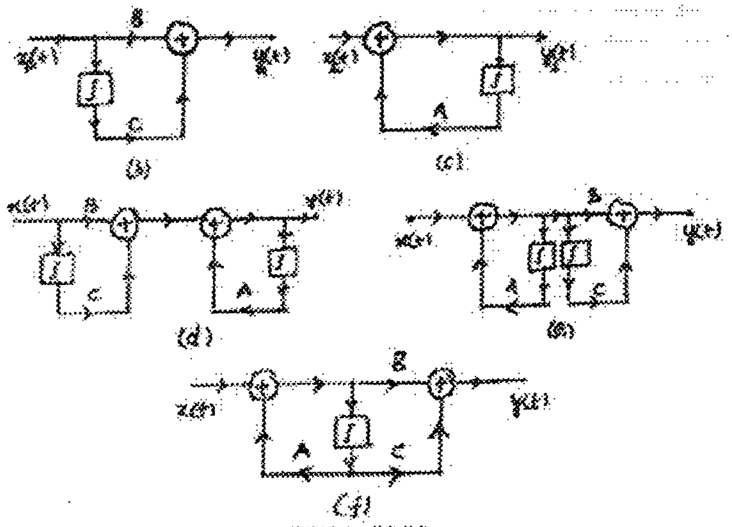
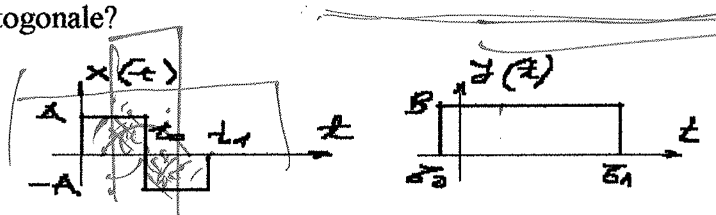


Figure S2.59

5. Semnalele x(t) şi y(t) sunt înmulţite cu semnalul m(t) care satisface condiţia $m(t-t_0)=m(t+t_0)$. În ce condiţii transformatele Fourier ale semnalelor m(t)x(t) şi m(t)y(t) sunt ortogonale?



PATACHE
NICOLAE
An III gr 5306

2.604 2000

Concurs T. Tănăsescu faza locală

8p

1) Se consideră filtrul caracterizat de caracteristica în frecvență: $A(\omega) = \begin{cases} a + b\cos\frac{n\pi\omega}{\Omega} & |\omega| < \Omega \\ 0 & |\omega| > \Omega \end{cases}$

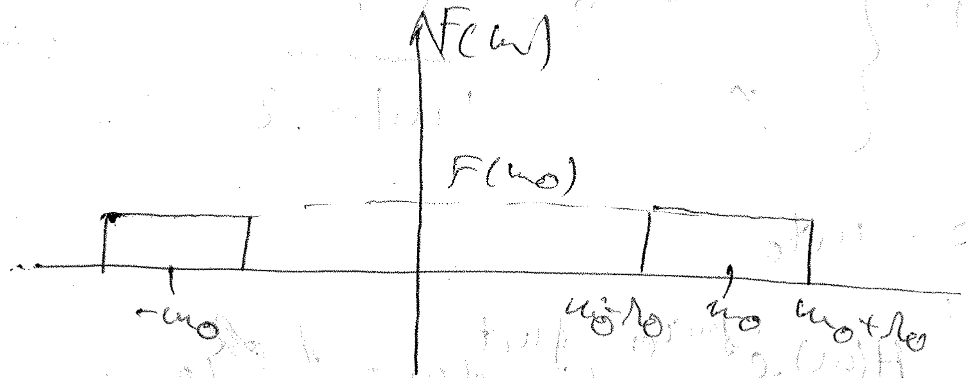
$\varphi(\omega) = -\omega t_0$

a) Să se determine funcția pondere a filtrului $h(t)$

b) Să se determine răspunsul filtrului la o excitație arbitrară și să se interpreteze rezultatul.

2°) Se consideră semnalul de bandă limitată având spectrul din figură

$F(\omega)$



Acest semnal se eșantionează natural cu frecv. Ω și fereastra τ, $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. a) Să se det. spectrul semnalului rezultat și repr. grafic.

b) Să se compare spectrul obținut cu cel rezultat prin modulația cu reținere. Discuție asupra celor 2 situații.

3) $f(t) \to \boxed{h(t)} \to y(t)$ La intrarea unui sist. cu $h(t) = e^{j\alpha t^2}$ se aplică semnalul $f(t)$

Să se dem. că răspunsul este aproximativ de forma

$$y(t) \simeq \left[F(2\alpha t) - j\alpha F''(2\alpha t)\right] e^{j\alpha t^2} \quad \alpha \ll$$

4) Se consideră un filtru discret de tip trece tot

$|H(e^{j\omega T})| = 1$. Să se arate că polii și zerourile sunt situate față de cercul unitate: $p_i = \frac{1}{z_i^*}$

b) La intrarea sistemului se aplică un semnal cauzal $e[n]$. Să se arate că $\sum_0^{\infty} e^2[n] = \sum_0^{\infty} y^2[n]$

c) Să se arate că $\sum_0^{n_0} e^2[n] \geq \sum_0^{n_0} y^2[n]$

1) $A(\omega) = \begin{cases} a + b\cos\frac{n\pi\omega}{\Omega} & |\omega| \leq \Omega \\ 0 & |\omega| > \Omega \end{cases}$

$\varphi(\omega) = -\omega t_0$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-j\omega t_0} \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\left(a + b\cos\frac{n\pi\omega}{\Omega}\right) e^{+j\omega(t-t_0)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} a\, e^{j\omega(t-t_0)} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} b\cos\frac{n\pi\omega}{\Omega} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{a}{j(t-t_0)}\left(e^{j\Omega(t-t_0)} - e^{-j\Omega(t-t_0)}\right) + \frac{b}{2\pi}\left[\frac{2\Omega \cdot \Omega^2(t-t_0)^2}{\Omega^2(t-t_0)^2 + n^2\pi^2} \cdot \cos n\pi \cdot\right.$$

$$\cdot \sin\Omega(t-t_0) + \frac{2n\pi\,\Omega^2(t-t_0)^2}{\Omega^2(t-t_0)^2 - n^2\pi^2} \cdot \frac{1}{j^2\Omega(t-t_0)^2} \underbrace{\sin n\pi}_{0} \cos\Omega(t-t_0)$$

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} \cos\frac{n\pi\omega}{\Omega}\, e^{j\omega(t-t_0)}\, d\omega = \frac{\cos\frac{n\pi\omega}{\Omega}}{j(t-t_0)}\, e^{j\omega(t-t_0)}\Big|_{-\Omega}^{\Omega} +$$

$$+ \frac{n\pi}{j\Omega(t-t_0)}\int_{-\Omega}^{\Omega} \sin\frac{n\pi\omega}{\Omega}\, e^{j\omega(t-t_0)}\, d\omega = \frac{e^{j\Omega(t-t_0)}}{j(t-t_0)}\cos n\pi -$$

$$- \frac{e^{-j\Omega(t-t_0)}}{j(t-t_0)}\cos n\pi + \frac{n\pi}{j\Omega(t-t_0)}\left[\frac{\sin\frac{n\pi\omega}{\Omega}}{j(t-t_0)}\, e^{j\omega(t-t_0)}\Big|_{-\Omega}^{\Omega} -\right.$$

$$\left. - \int \frac{n\pi}{j\Omega(t-t_0)}\cos\frac{n\pi\omega}{\Omega}\, e^{j\omega(t-t_0)}\, d\omega\right) =$$

$$= \frac{2\cos n\pi}{t-t_0}\sin\Omega(t-t_0) + \frac{n\pi}{j\Omega(t-t_0)}\,\frac{\sin n\pi}{j(t-t_0)}\, e^{j\Omega(t-t_0)} - \frac{n\pi}{j\Omega(t-t_0)}\,\cdot$$

$$\cdot \frac{\sin -n\pi}{j(t-t_0)}\, e^{-j\Omega(t-t_0)} - \frac{n^2\pi^2}{j^2\Omega^2(t-t_0)^2}\underbrace{\int \cos\frac{n\pi\omega}{\Omega}\, e^{j\omega(t-t_0)}\, d\omega}_{I}$$

$$\left\{1+\left[\frac{n\pi}{j\Omega(t-t_0)}\right]^2\right\} I = \frac{2\cos n\pi}{t-t_0}\sin\Omega(t-t_0) + \frac{2n\pi}{j^2\Omega(t-t_0)^2}\sin n\pi\,\cdot$$

$$\cdot \cos\Omega(t-t_0) \Rightarrow I = \left[2\Omega\cos n\pi\,\mathrm{sinc}\,\Omega(t-t_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{2n\pi}{j^2\Omega(t-t_0)^2}\sin n\pi\cos\Omega(t-t_0)\right]\left(\frac{j^2\Omega^2(t-t_0)^2 - n^2\pi^2}{j^2\Omega^2(t-t_0)^2}\right)^{-1}$$

$$\mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin x}{x}$$

$$h(t) = \frac{a\Omega}{\pi}\,\text{sinc}\,\Omega(t-t_0) + \frac{b\,\Omega^3(t-t_0)^2}{\pi\Omega^2(t-t_0)^2 - n^2\pi^3}\cos n\pi\,\text{sinc}\,\Omega(t-t_0) + 0$$

$$\cancel{+\frac{2n\pi\,\Omega^2(t-t_0)^2}{\Omega^2}}$$

$$h(t) = \left[\frac{a\Omega}{\pi} + \frac{b\,\Omega^3(t-t_0)^2}{\pi\Omega^2(t-t_0)^2 + n^2\pi^3}(-1)^n\right]\text{sinc}\,\Omega(t-t_0)$$

Dacă $e(t)$ este excitația $\Rightarrow$ $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau \Rightarrow$

$y(t) = e(t) * h(t)$

Rezultatul (răspunsul sistemului) este o convoluție dintre un semnal atenuat și excitația multiplicată cu o constantă K.

2°) $F(\omega) = p_{\omega_0}(\omega-\omega_0) + p_{\omega_0}(\omega+\omega_0)$

$p_{\omega_0}(\omega) \longleftrightarrow \pi\,\text{sinc}\,\omega_0 t$

$p_{\omega_0}(\omega\pm\omega_0) \longleftrightarrow \pi\,\text{sinc}\,\omega_0 t\; e^{\pm j\omega_0 t}$

Prin eșantionare naturală va trebui să înmulțim întâi cu $\delta_T(t)$

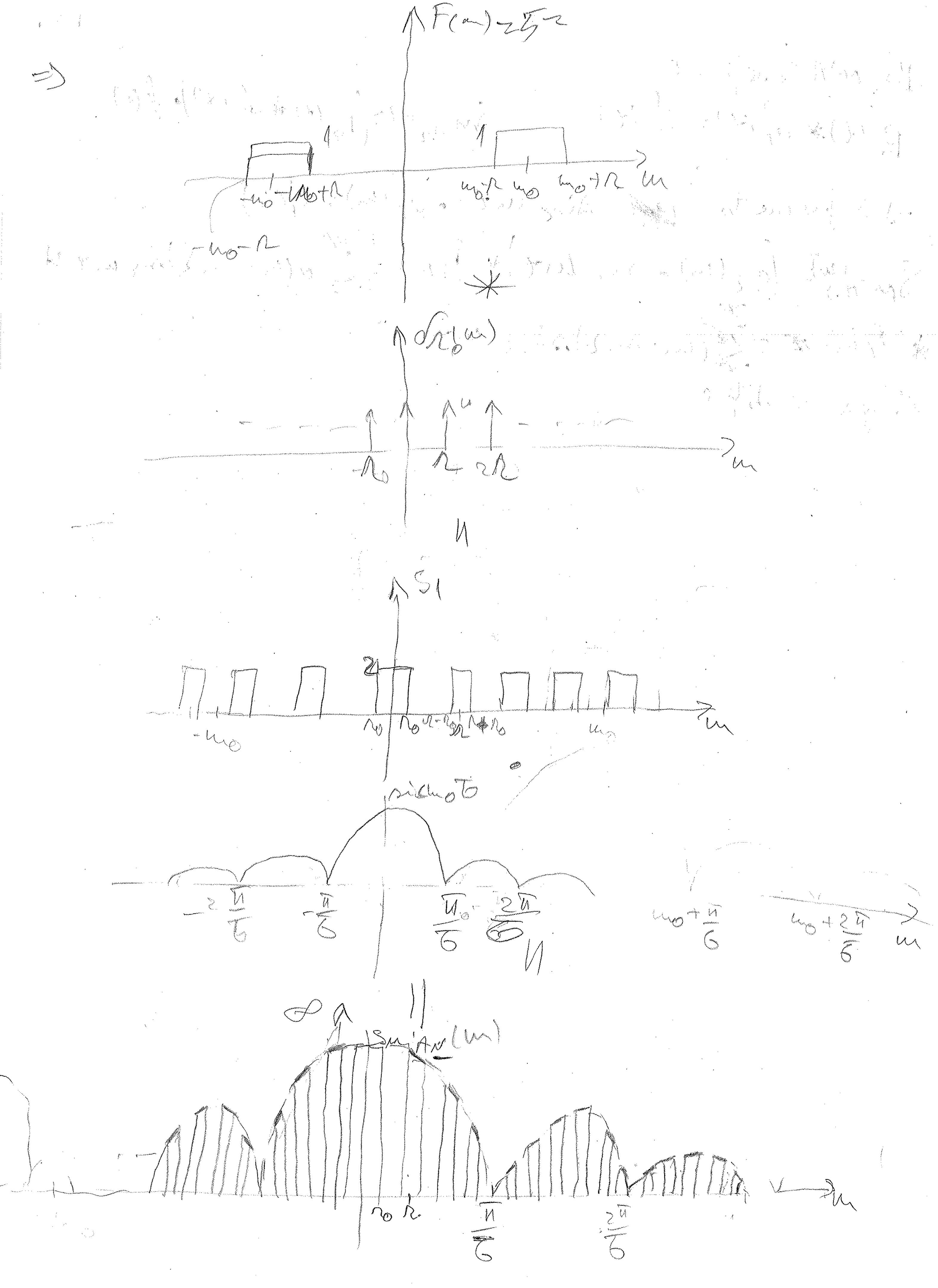
și apoi rezultatul convoluției cu $p_\tau(t)$

$\Rightarrow$ $S_1(\omega) = F(\omega) * \delta_\Omega(\omega)$

$S_{MIAN}(\omega) = [F(\omega) * \delta_\Omega(\omega)] \cdot \text{sinc}\,\omega_0\tau$

$S_1(\omega) = F(\omega) * \Omega\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\Omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(\omega - n\Omega)$

$S_{MIAN}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(\omega - n\Omega)\cdot\text{sinc}\,\omega_0\tau$


F(ω)
1
-ω0+Ω
-ω0-Ω
ω0-Ω ω0 ω0+Ω
ω
Ω 2Ω
ω
ω
-π/6
π/6
2π/6
ω0+π/6
ω0+2π/6
ω
π/6
2π/6
ω

Per MIA2 otteniamo

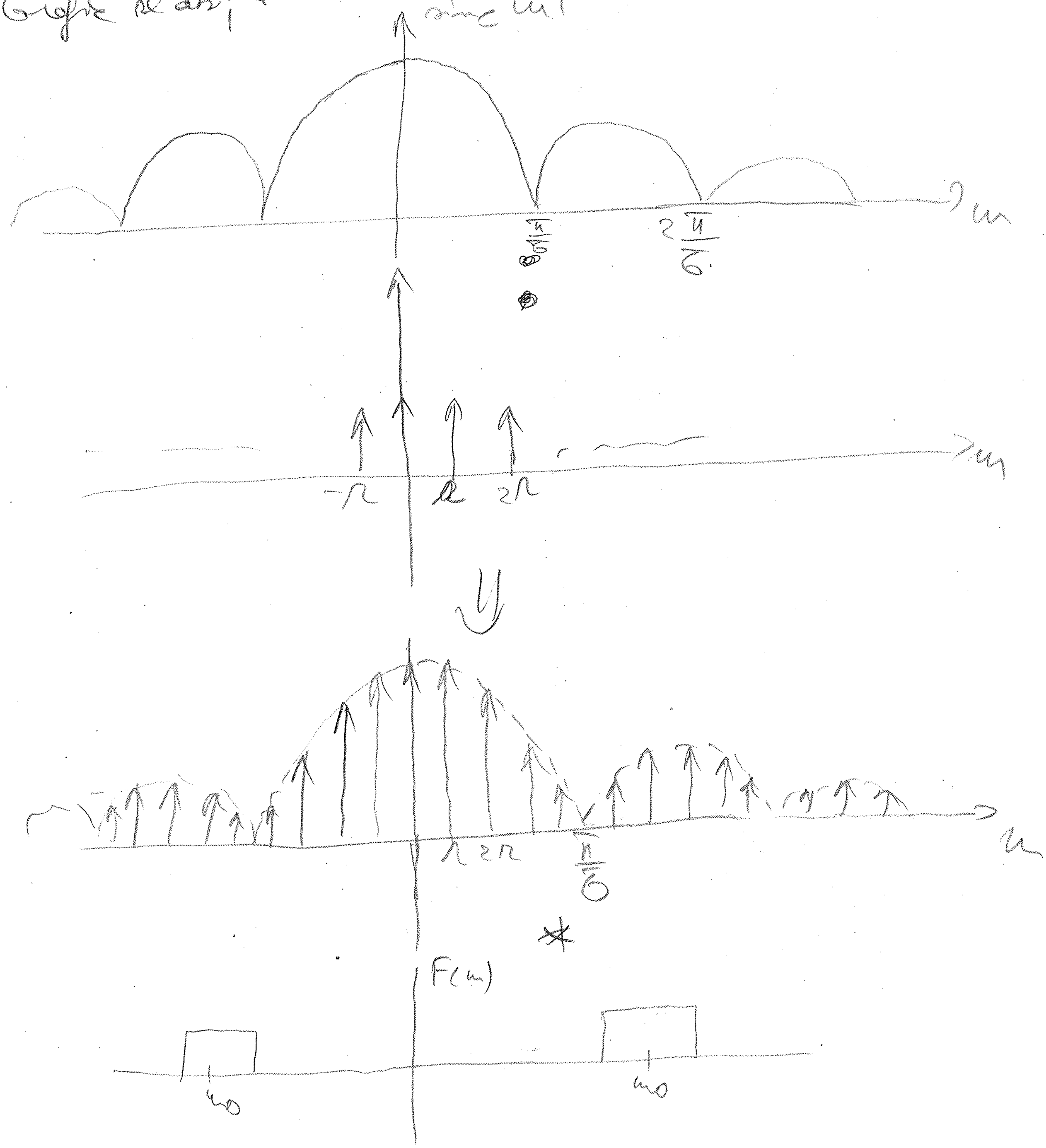
$P_\tau(t) * \delta_T(t) = S_1'(t)$ $\qquad$ $S_{MIA_2}(t) = \left(P_\tau(t) * \delta_T(t)\right) \cdot f(t)$

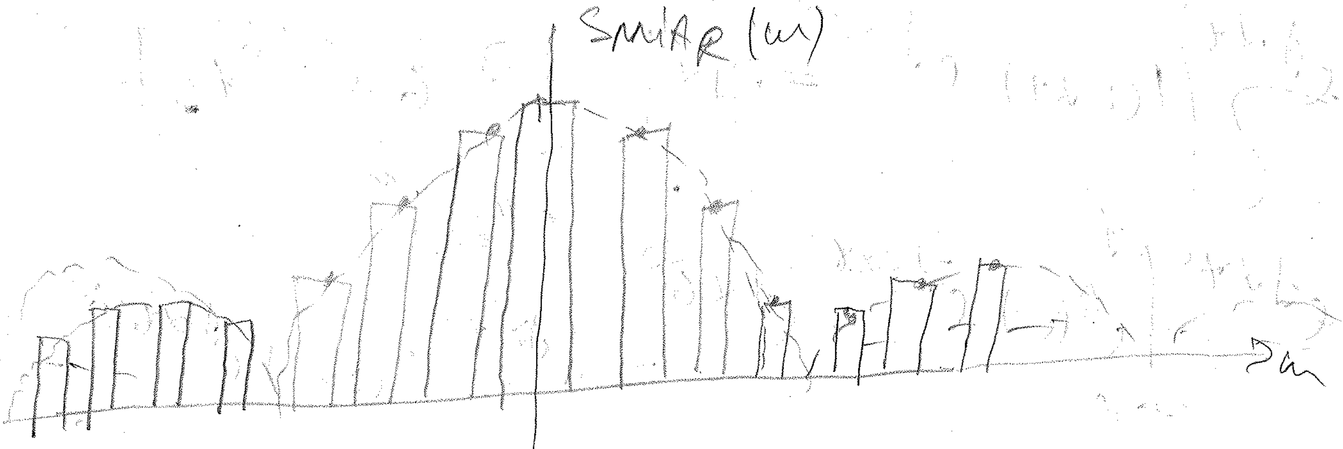
→ in frequenza sinc $\omega\tau \cdot \delta_\Omega(\omega) = S_1'(\omega)$

$S_{MIA_2}(\omega) = \left(\delta_\Omega(\omega) \cdot \text{sinc}\,\omega\tau\right) * F(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega)\,\text{sinc}\,\omega\tau \; *$

$* \; F(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(\omega - n\Omega)\,\text{sinc}\,\omega\tau$

Grafici relativi





Se observă că deși spectrul celor două tipuri de eșantionări are aceeași alură, cele 2 tipuri de eșantionări s-au obținut diferit în MIA metoda reține alura spectrului pe durata impulsului iar cea cu reținere reține doar un punct din alura spectrului.

3) $f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \qquad h(t) = e^{j\alpha t^2}$

$$\cancel{H(\omega) = 2\pi f}$$

$$\cancel{H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha t^2} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega t - \alpha t^2)}\, dt} =$$

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{j\alpha (t-\tau)^2}\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-j\alpha(2t\tau - \tau^2)}\, d\tau \cdot e^{j\alpha t^2} =$$

$$\cancel{= e^{j\alpha t^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-j2\alpha t\tau}\, d\tau \cdot e^{j\alpha\tau^2} - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-j2\alpha t\tau}\, d\tau \cdot e^{j\alpha\tau^2}\, d\tau \right]} =$$

$$\cancel{y(t) = e^{j\alpha t^2}\left[F(2\alpha t)\, e^{j\alpha\tau^2} - 2j\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F(2\alpha t)\, \tau\, e^{j\alpha\tau^2} d\tau\right] =}$$

$F''(2\alpha t)$

$$y(t) = e^{j\alpha t^2}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-j2\alpha t\tau} \cdot e^{j\alpha\tau^2} = e^{j\alpha t^2} F(2\alpha t)\, e^{j\alpha\tau^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$- e^{j\alpha t^2}\, 2j\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F(2\alpha t)\, \tau\, e^{j\alpha\tau^2} d\tau =$$

$$= e^{j\alpha t^2} F(2\alpha t)\, e^{j\alpha\tau^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - e^{j\alpha t^2}\, 2j\alpha \left[\frac{1}{2\alpha} e^{j\alpha\tau^2} F(2\alpha t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\alpha} e^{j\alpha\tau^2} F'(2\alpha t)\, d\tau\right] = \text{integrală încă de 2 ori pe rând}$$

rotunjit $\Rightarrow y(t) \simeq \left[F(2\alpha t) - j\alpha F''(2\alpha t)\right] e^{j\alpha t^2}$

4) $\left|H(e^{j\omega T})\right| = 1$

Fie $H(z) = \dfrac{(z+z_1)(z+z_2)(z+z_3)\cdots(z+z_n)}{(z+p_1)(z+p_2)(z+p_3)\cdots(z+p_m)}$

pentru ca modulul 1 numărul zerourilor trebuie să fie egal cu cel al polilor. $p_i, z_i \in \mathbb{C}$

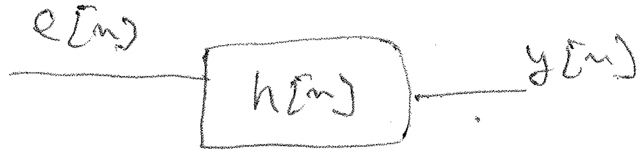
$$H(z) = \frac{z^n + z^{n-1}(z_1+z_2+\dots z_n) + z^{n-2}(z_1z_2 + z_1z_3 + \dots z_nz_{n-1}) + \dots + z_1\cdots z_n}{z^m + z^{m-1}(p_1+p_2+\dots p_m) + z^{m-2}(p_1p_2 + \dots + p_mp_{m-1}) + \dots + p_1\cdots p_m}$$

$\lim_{z\to\infty} H(z) = 1$ dacă n=m este necesar să $\lim_{z\to 0} H(z) = 1$

$$\lim_{z\to 0} H(z) = \frac{z_1 z_2 \cdots z_m}{p_1 \cdots p_m} = 1 \quad (1)$$

Pentru a satisface relația (1) => că $p_i = \frac{1}{z_i^*}$ sau $z_i = \frac{1}{p_i^*}$

b)



$$Y^2(z) = H^2(z) \cdot E^2(z) = E^2(z) \Rightarrow Y^2(z) = E^2(z)$$

Dar energia din frecvență e egală cu energia din timp.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y^2[n] = \sum_{n=0}^{\infty} e^2[n]$$

c)

$h[n] = \delta[n]$

$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} e[k]\, h[n-k]$ semnalul se va obține întârziat la ieșirea din filtru ceea ce înseamnă că ~~[illegible]~~ în orice moment am lua energia semnalului de la ieșire va fi mai mică decât energia semnalului de la intrare excluzând momentul ∞ asta înseamnă că

$$\sum_{n=0}^{n_0} y^2[n] \leq \sum_{n=0}^{n_0} e^2[n]$$

Urei dpõ 3
Sabato dpõ 2

1. Fie sistemul liniar și invariant în timp descris de relația

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}\, x(\tau-3)\, d\tau$$

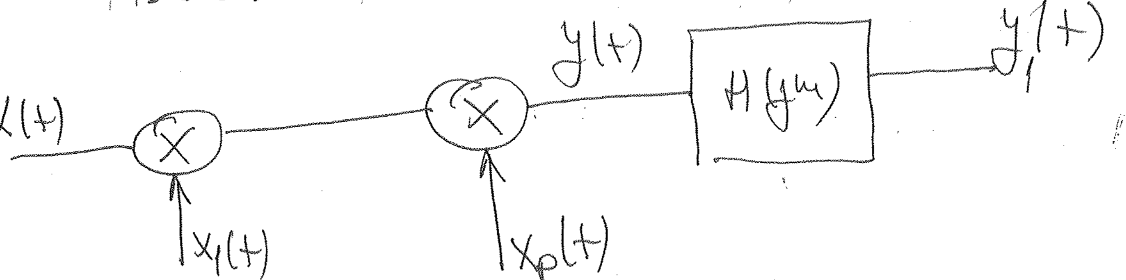
Determinați $h(t)$ și răspunsul la $e(t)=\sigma(t+1)-\sigma(t-3)$

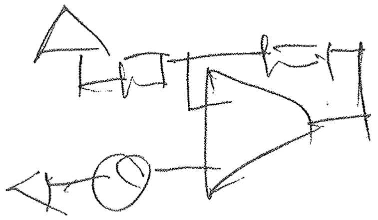
2. Fie un sist. discret liniar descris de răspunsul la impuls

$$h[n]=(n+1)\,\alpha^{n}\,u[n] \qquad \alpha<1.$$

Det. răspunsul sist. la $\sigma[n]$

3. Se consideră sistemul





$$x_p(t)=\begin{cases} 1 & t\in\left(0,\ \frac{T}{2}\right) \\ -1 & t\in\left(\frac{T}{2},\ T\right) \end{cases}$$

$x_1(t)=\sin(\omega_p t)$

a) Să se det. și să se repr. grafic spectrul $y(t)$ considerând

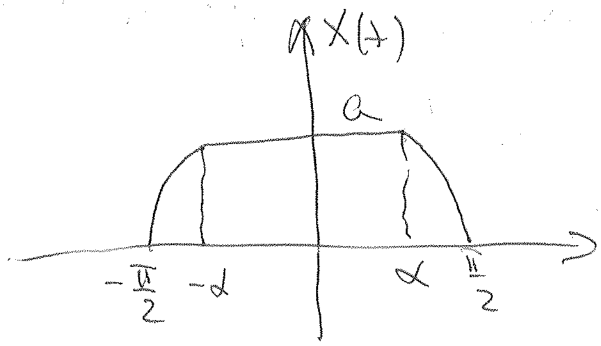
$$x(t)=\frac{\sin\frac{\omega_p t}{2}}{\pi t}$$

b) Să se exprime $H(j\omega)$ astfel încât $y_1(t)=x(t)$

c) Care este $y_1(t)$ dacă $x_1(t)=\cos\omega_p t$ iar $H(j\omega)$ este cel determinat la punctul b

4. Det. transf. Fourier pt. semnal

$$x(t)=\begin{cases} \cos(t) & -\frac{\pi}{2}<t<-\alpha \text{ și } \alpha<t<\frac{\pi}{2} \\ a & -\alpha\le t\le\alpha \end{cases}$$



discuție după α !!

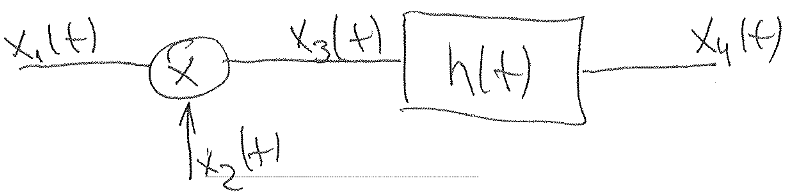
$a=\cos\alpha$

5. Se consideră semnalul de eșantionare $p(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} h(t-nT)$

ptr. care $h(t)=\sigma\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-2\sigma(t)+\sigma\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$ $\quad \tau<T$

Să se găsească și să se reprezinte grafic spectrul semnalului eșantionat $x_e(t)$ pentru $x(t)=\cos\omega_0 t$

6.



$$x_1(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{10}\cos n\omega_0 t$$

$$x_2(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\cos n\omega_0 t$$

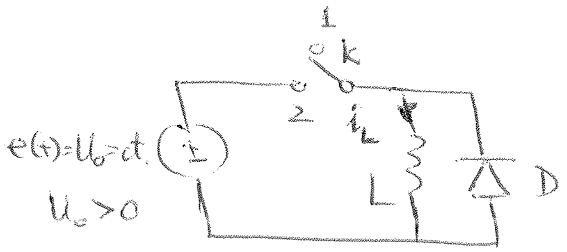
$$h(t)=\frac{\sin\frac{\omega_0 t}{2}}{\pi t}$$

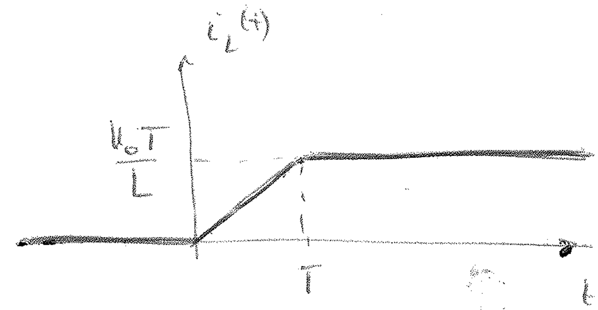
a) Să se det. și repr. grafic $x_3(t)$

b) Să se exprime $x_3(t)$ ca sumă de componente armonice

c) det. și repr. grafic $x_4(t)$

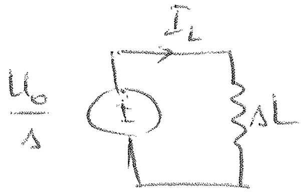
Se dă circuitul din figură. Comutatorul k este inițial pe poziția 1. La $t=0$, k trece pe poziția 2 unde stă un timp T și apoi trece din nou pe poziția 1. Să se afle forma curentului prin bobină presupunând dioda D ideală (fără rezistență internă și cu tensiune de deschidere zero).





Rezolvare

La închiderea comutatorului k, dioda D este polarizată invers, deci blocată. Schema echivalentă este:



$$I_L(s)=\frac{U_0}{s}\cdot\frac{1}{sL}=\frac{U_0}{s^2L}$$

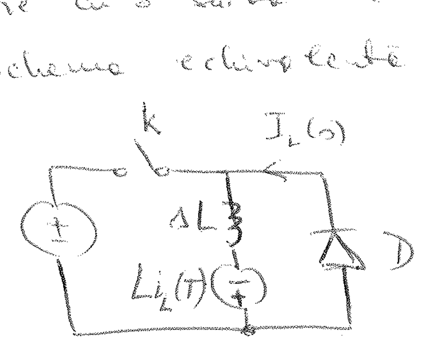
$$i_L(t)=\frac{U_0}{L}\cdot t\,\sigma(t) \qquad t\in[0,T)$$

La momentul $t=T$, curentul prin bobină are valoarea

$$i_L(T)=\frac{U_0T}{L}$$

La deschiderea întrerupătorului k are loc un nou fenomen tranzitoriu. Bobina L trebuie înlocuită în schema echivalentă cu o bobină în serie cu o sursă de tensiune având valoarea $L\,i_L(T)$ (în Laplace).

Schema echivalentă este:



Sursa de tensiune ce apare în serie cu bobina polarizează direct dioda D deschizând-o. Deoarece D este ideală, ea se va comporta ca un scurt circuit.

$$I_L(s)=L\cdot i_L(T)\cdot\frac{1}{sL}=\frac{i_L(T)}{s}$$

$t\in[T,\infty)$ $\quad i_L(t)=i_L(T)\cdot\sigma(t)$ cu originea timpului mutată în $t=T$

Forma de undă pt. $i_L(t)$ este în figură

1°. Să se arate că ($\alpha \ll$):

$$f(t) * e^{j\alpha t^2} \simeq \left[F(2\alpha t) - j\alpha F''(2\alpha t)\right] e^{j\alpha t^2}$$

Soluție:

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{j\alpha(t-\tau)^2}\, d\tau = \cancel{e^{j\alpha t^2}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-j2\alpha\tau}\, d\tau}$$

$$e^{j\alpha t^2}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{j\alpha\tau^2}\, e^{-j2\alpha\tau t}\, d\tau$$

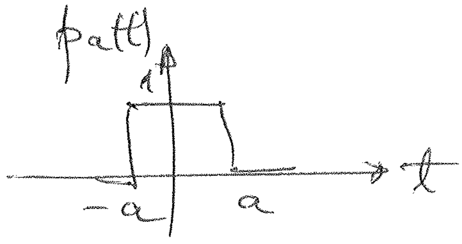
$$\begin{cases} e^{j\alpha\tau^2} \simeq 1 + j\alpha\tau^2 \\ j\alpha t^2 f(t) \leftrightarrow -j\alpha F''(\omega) \end{cases}$$

b)

2°. Să se calculeze transformatele Fourier ale semnalelor $f_1(t)$ și $f_2(t)$. În ce condiții semnalele sunt identice?

$$f_1(t) = \delta_T(t) * \left[p_a(t)\cos\omega_0 t\right]$$

$$f_2(t) = \left[\delta_T(t) * p_a(t)\right]\cos\omega_0 t$$



3°. Se consideră un filtru discret trece-tot cu $|H(e^{j\omega T})| = 1, (\forall)\omega$.

a) Să se arate că polii și zerourile sunt simetrice față de cercul unitate, adică:

$$p_i = \frac{1}{z_i^*}$$

b) La intrarea sistemului se aplică un semnal cauzal $e[n]$. Să se arate că: $\sum_{n=0}^{\infty} y^2[n] = \sum_{n=0}^{\infty} e^2[n]$.

c) Să se arate că: $\sum_{n=0}^{n_0} e^2[n] > \sum_{n=0}^{n_0} y^2[n]$.