

Sauție:

semnalul obținut este un semnal MA-BLU;
punerea în cascadă a celor 2 blocuri de pe ramura inferioară nu este comutativă: în general, dispunerea în cascadă a unui sistem liniar și a unui sistem neliniar nu este comutativă;
sistemul cu funcția de transfer $H(\omega)$ este un transformator Hilbert;
condiția $\Omega_{\max} < \omega_0$ este obligatorie pentru obținerea unui semnal MA-BLU corect;
dacă semnalele $x_1(t)$ și $x_3(t)$ se scad se obține tot un semnal MA-BLU (se refire banda laterală inferioară a semnalului $x_1(t)$).

10. Să se arate că ($\alpha < \infty$):

$$f(t) * e^{j\alpha t^2} \approx [F(2\alpha t) - j\alpha F''(2\alpha t)] e^{j\alpha t^2}$$

Soluție:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\alpha(t-\tau)^2} d\tau = e^{j\alpha t^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j2\alpha\tau t} d\tau$$

$$e^{j\alpha t^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\alpha\tau^2} e^{-j2\alpha\tau t} d\tau$$

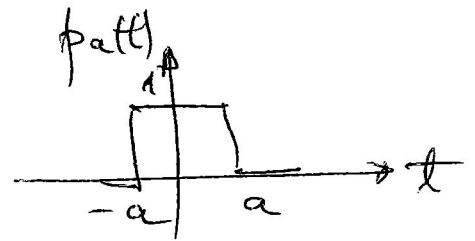
$$\begin{cases} e^{j\alpha\tau^2} \approx 1 + j\alpha\tau^2 \\ j\alpha\tau^2 f(\tau) \leftrightarrow -j\alpha F''(\omega) \end{cases}$$

b)

20. Să se calculeze transformatele Fourier ale semnalelor $f_1(t)$ și $f_2(t)$. În ce condiții semnalele sunt identice?

$$f_1(t) = \delta_T(t) * [\phi_a(t) \cos \omega_0 t]$$

$$f_2(t) = [\delta_T(t) * \phi_a(t)] \cos \omega_0 t$$



30. Se consideră un filtru trece-tot cu $|H(e^{j\omega T})| = 1, \forall \omega$.

a) Să se arate că, polii și zerourile sunt simetrice față de ceroul unitate, adică:

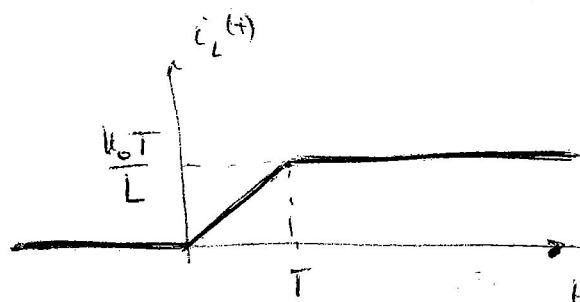
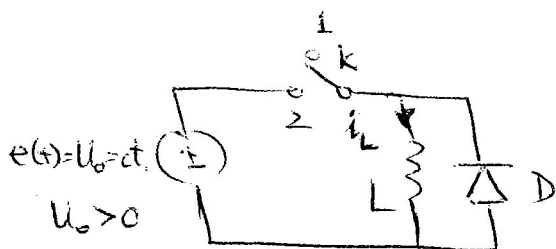
$$p_i = \frac{1}{z_i^*}$$

b) La intrarea sistemului se aplică un semnal causal $e[n]$.

$$\text{Să se arate că: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^2[n].$$

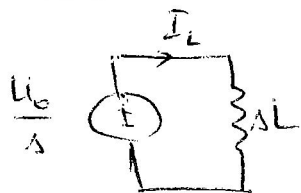
$$c) \text{ Să se arate că: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 > \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e[n]|^2.$$

Se are circuitul de figură. Comutatorul k este inițial pe poziția 1. La $t=0$, k trece pe poziția 2 unde stă un timp T și apoi trece din nou pe poziția 1. Se are ca date forma curentului prin bobină presupunând dioda D ideală (fără rezistență internă și cu tensiune de deschidere zero).



Rezolvare

La închiderea comutatorului k , dioda D este polarizată invers, deci blocați. Schema echivalentă este:



$$I_L(s) = \frac{U_0}{s} \cdot \frac{1}{sL} = \frac{U_0}{s^2 L}$$

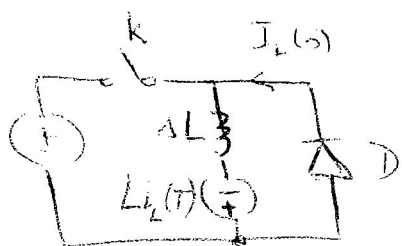
$$i_L(t) = \frac{U_0}{L} \cdot t \cdot \mathbf{1}(t) \quad t \in [0, T)$$

La momentul $t=T$, curentul prin bobină are valoarea

$$i_L(T) = \frac{U_0 T}{L}$$

La deschiderea comutatorului k are loc un nou fenomen tranzitoriu. Bobina L trebuie reînaltă în schema echivalentă cu o bobină în serie cu o sursă de tensiune corespunzătoare $L i_L(T)$ (în Laplace)

Schema echivalentă este:



Sursa de tensiune se opare cu tensiunea bobinei polarizată direct. Dioda D deschide. Deoarece D este ideală, nu se va comporta ca un scurt-circuit.

$$I_L(s) = L \cdot i_L(T) \cdot \frac{1}{s} + \frac{U_0 T}{s^2}$$

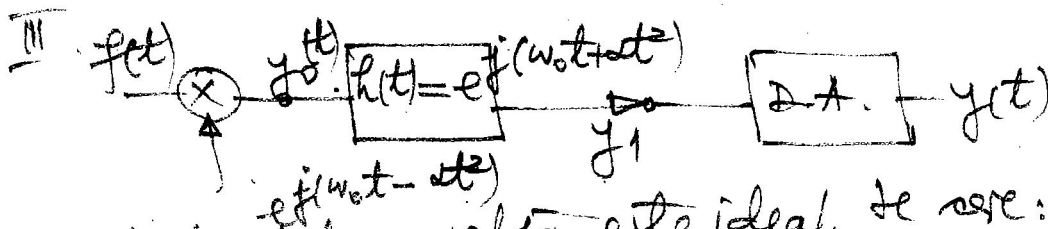
$$\mathcal{L}^{-1}\{I_L(s)\} \quad i_L(t) = i_L(T) \cdot \mathbf{1}(t) + \frac{U_0}{L} \cdot t \cdot \mathbf{1}(t)$$

Forma de curent $i_L(t)$ este în figură.

I. Se consideră sistemul $H(z) = \frac{K}{1 - \alpha z^{-1}}$. Se cere să se deducă formula Weidelich în care $g(\omega)$ (suma periodică răscăle la intrare) și folosind rezultatul să se determine amplitudinea $H(z)$ în regim forțat în cazul particular:
 $g_k[n] = \sqrt{k} \delta[n - 3]; K=1; \alpha=0.5; N=6$.

II. Se consideră un sistem causal de tip trece-tot având în intrare $x(t)$ și ieșirea $y(t)$. Se cere să se demonstreze că:

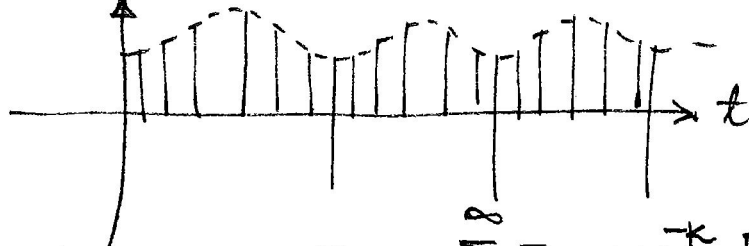
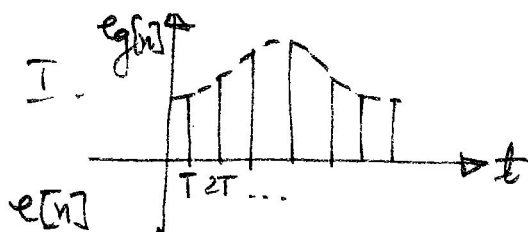
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \geq \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$



Detectorul de amplitudă este ideal. Se cere:
 a) să se determine raportul $y(t)/x(t)$ și să se interpreteze.
 b) pentru cazul particular: $f(t) = \sin \omega_0 t$ să se determine condiția ca raportul unui integrator ideal la intrare să se aplice $y(t)$ să nu depășească valoarea 1.

IV. Să se determine clasa de sume $\{g(t) / G(\omega) = j\omega \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{(\frac{\omega T}{2})} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0), cu F(\omega) \text{ arbitrar} \}$.

V. Un sistem discret are $H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$. Se cere să se determine cea mai simplă expresie a bazei la 3dB a sistemului.



$$a) e[n] = \sum_{k=0}^{\infty} e_g(n-kT) \iff E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} E_g(z) z^{-k} = E_g(z) \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(x) = H(x)F(x) = H(x)F_g(x) \frac{1}{1-x^2}$$

$$Y_f(z) = Y_g(z) \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ si } Y(z) = Y_f(z) + Y_e(z) \text{ deci:}$$

$$H(z) = Y(z) \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = Y(z) + Y(z) \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ le unde:}$$

$$Y_g(z) = Y_g(z) + 0 - Y_l(z)(1-z^{-1})$$

Espreia lui $\tau(z)$ se deduce din:

Esprimendo lui $f(z)$ si deduce che:

$$f(z) = F(z) + G(z) = \left(\frac{1}{z - p_1} + \frac{1}{z - p_2} + \dots \right) + \left(\frac{1}{z - p_1} + \frac{1}{z - p_2} + \dots \right)$$

$$\text{Deci } Y(z) = F(z)H(z) = H(z) \cdot \frac{Y_L(z)}{F(z)} \Rightarrow Y_L(z) = \sum_i \frac{R_L(p_i)}{z - p_i}$$

$$\text{In case } R_L(p_i) = \left[\frac{(z - p_i)H(z)}{z - p_i} \right]_{z=p_i} \cdot \frac{F(p_i)}{1 - p_i}$$

b) În cazul nostru particular avem:

$$H(z) = \frac{K}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-0.5)^2}$$

$$H(z) = \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-0.5)^2}$$

$$y[n] = x[n] - x[n-3] \Rightarrow Y(z) = \frac{z}{z-1} - z^{-3} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z-1} (1 - z^{-3})$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} (1-x^3) \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{(x-0.5)^2} = \frac{x^2}{(x-1)^2} \frac{x^3}{x^3} \frac{1}{(x-0.5)^2} = \frac{x^2+2x+1}{x(x-1)(x-0.5)^2}$$

$$f(z) = \frac{A}{z-0.5} + \frac{\cancel{B} + B}{(z-0.5)^2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$$

A se determina lui $T(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z(z-1)(z-0.5)} = \frac{A}{z-0.5} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z} + \frac{D}{z-1}$

$$y_1(t) = f(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\omega_0 t}$$

$$Y_1(\omega) = F(\omega) * F\{e^{j(\omega_0 t - t^2)}\} \cdot F\{e^{j(\omega_0 t - t^2)}\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \tau}{\pi \tau} e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \tau}{\pi \tau} e^{j\omega_0 \tau} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \tau}{\pi \tau} e^{j\omega_0 \tau} d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \tau}{\pi \tau} e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \tau}{\pi \tau} e^{j\omega_0 \tau} d\tau =$$

$$= e^{-j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \tau}{\pi \tau} e^{j\omega_0 \tau} d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \tau}{\pi \tau} e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \tau}{\pi \tau} e^{j\omega_0 \tau} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \tau}{\pi \tau} e^{j\omega_0 \tau} e^{-j\omega_0 \tau} d\tau$$

cas pentru integrala lui ideal la semnalul y(t) vari

$$\frac{1}{\tau} \leftrightarrow \pi \tau$$

$$f(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) y(t) dt$$

$$F\{e^{j(\omega_0 t - t^2)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 t - t^2)} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j[(\omega_0 - \omega)t - t^2]} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j[-t^2 + (\omega_0 - \omega)t]} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j[-t^2 + (\omega_0 - \omega)t]} dt =$$

$$= e^{j\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j[t - \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)]^2} dt = c e^{j\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)^2}$$

$$F\{e^{j(\omega_0 t - t^2)}\} = c$$

Puteam calcula:

$$F\{e^{j\omega_0 t}\} = \frac{1}{\delta + j\omega}$$

$$\frac{\sin \pi \tau}{\pi \tau} \cdot e^{-j\omega_0 \tau} \triangleq \frac{1}{\delta + j\omega}$$



Tu care $C = -4$; $D = 12$ și înmulțind cu $z - 0,5$ și trecând la limită pentru $z \rightarrow \infty$ obținem:

$$A + C + D = 0 \Rightarrow A = -C - D = -8$$

$$Y_L(z) = \frac{-8}{z - 0,5} + \frac{7}{(z - 0,5)^2} \text{ și în final:}$$

$$Y_g(z) = \frac{z}{z - 1} (1 - z^{-3}) \left[\frac{1}{(z - 0,5)^2} + \left[\frac{8}{z - 0,5} + \frac{7}{(z - 0,5)^2} \right] (1 - z^{-1}) \right]$$

III - a) $y_0(t) = f(t) e^{j(\omega_0 t + \alpha t^2)}$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0(t) * h(t) = f(t) e^{j(\omega_0 t + \alpha t^2)} * e^{j(\omega_0 t + \alpha t^2)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j(\omega_0 \tau - \alpha \tau^2)} e^{j[\omega_0 (t - \tau) + \alpha (t - \tau)^2]} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j[\omega_0 \tau - \alpha \tau^2 + \omega_0 (t - \tau) + \alpha (t - \tau)^2]} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j[\omega_0 t + \alpha t^2 - 2\alpha t\tau]} d\tau = e^{j(\omega_0 t + \alpha t^2)} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-2j\alpha t\tau} d\tau \end{aligned}$$

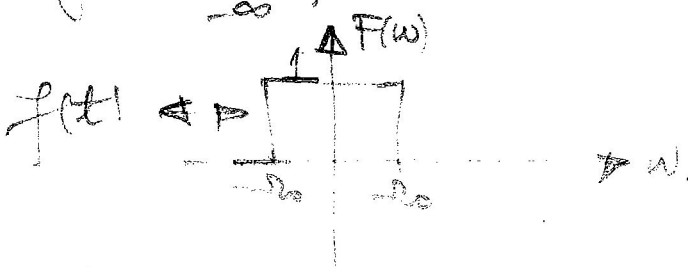
Deci după detectorul de amplitudă se va obține numai înfășurătoarea acestui semnal, care este:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-2j\alpha t\tau} d\tau$$

Explicația constă în observația că semnalul de intrare în sistemul $h(t)$, care este $y_0(t)$ și este modulat în fază, este transformat de sistem într-un semnal modulat în amplitudă, semnalul modulator putând fi obținut prin utilizarea unui detector de amplitudă.

b) Pentru $f(t) = \frac{\sin \pi \omega t}{\pi t}$ se obține:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-2j\alpha t\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \omega \tau}{\pi \tau} e^{-2j\alpha t\tau} d\tau$$



$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} F_0(\omega) * \frac{1}{\sqrt{2}} \delta(\omega - \omega_c)$$

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 2r \cos \alpha + r^2}$$

$$e^{sT} = z$$

2

În banda mijlocie avem: $H(z) = H(e^{sT}) \Big|_{s=0} = \frac{1}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}$

La 3 dB trebuie să avem:

$$H(z_{3dB}) = \frac{H(1)}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{z_{3dB}^2 - 2r \cos \alpha + r^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}$$

$$(z_{3dB} - r \cos \alpha)^2 + r^2 \sin^2 \alpha = \sqrt{2} (1 - 2r \cos \alpha + r^2) = \sqrt{2} [(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha]$$

$$z_{3dB} = r \cos \alpha + \sqrt{\sqrt{2} [(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha] - r^2 \sin^2 \alpha} \approx$$

$$\approx r \cos \alpha + \sqrt{\sqrt{2} [(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha] - \sin^2 \alpha} =$$

$$= r \cos \alpha + \sqrt{\sqrt{2} [4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \alpha] - \sin^2 \alpha} \approx r \cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

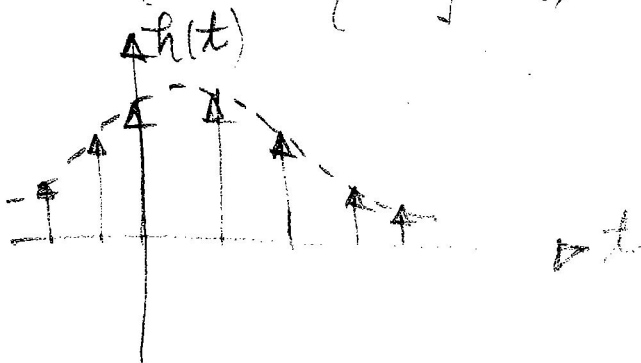
$$IV. G(\omega) = j\omega \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 \sum_{-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_c)$$

$$\text{Pe } H(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 \sum F(\omega - n\omega_c) = \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 \cdot F(\omega) * \delta_{\Omega}(\omega), \text{ deci:}$$

$$g(t) = h'(t).$$

3

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 F(\omega) \right\} = \frac{1}{\Omega} \delta_T(t)$$



$$\begin{aligned}
\text{II. } \int_{-\infty}^{t_0} |y(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt - \int_{t_0}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega - \int_{t_0}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega - \int_{t_0}^{\infty} |y(t)|^2 dt \\
\int_{t_0}^{t_0} |e(t)|^2 dt &= \int_{t_0}^{\infty} |e(t)|^2 dt - \int_{t_0}^{\infty} |e(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega - \\
&\quad - \int_{t_0}^{\infty} |e(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

Integralitatea devine:

$$\int_{t_0}^{\infty} |e(t)|^2 dt \leq \int_{t_0}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$

$h(t) = 0$ pentru $t < 0$.

$$y(t) = h(t) * e(t) \leftrightarrow Y(\omega) = H(\omega) * E(\omega)$$

$$\int y(\tau) y(t-\tau) d\tau =$$

①

Se consideră un sistem canonic de tip boce tot. $(|H(j\omega)| = 1, \forall \omega \in (-\infty, \infty))$
Să se demonstreze că: $\int_{-\infty}^{t_0} |e(t)|^2 dt \geq \int_{-\infty}^{t_0} |y(t)|^2 dt$ unde $e(t)$ și $y(t)$ sunt respectiv intrarea și ieșirea.

Demonstrare: $Y(\omega) = H(\omega) \cdot E(\omega)$, $|H(\omega)| = 1 \rightarrow |Y(\omega)| = |E(\omega)| \rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$

Fie $e_1(t) = \begin{cases} e(t) & t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$ și $y_1(t)$ răspunsul sistemului la $e_1(t)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |e_1(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{t_0} |e(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{t_0} |y_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{t_0} |y(t)|^2 dt + \int_{t_0}^{\infty} |y(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} |y(t)|^2 dt + \int_{t_0}^{\infty} |y(t)|^2 dt \end{aligned}$$

②

Semnalul $f(t)$ este de bandă limitată Ω_0 , iar detectorul de amplitudă este ideal.

Să se determine răspunsul $y(t)$ și să se interpreteze.

Pentru cazul particular $f(t) = \frac{\cos \Omega_0 t}{\pi t}$, să se determine condiția ca răspunsul unui integrator ideal la intrarea căreia se aplică $y(t)$ să nu depășească valoarea A .

Soluție: $y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{j(\omega_0 z - \alpha z^2)} e^{j[\omega_0(t-z) + \alpha(t-z)^2]} dz =$
 $= e^{j\omega_0(t + \alpha t^2)} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-j2\alpha t z} dz = F(2\alpha t) e^{j(\omega_0 t + \alpha t^2)}$

$y(t) = F(2\alpha t)$, deci în funcție de amplitudă, semnalul $y(t)$ este transformarea Fourier a semnalului $f(t)$. Condiția de bandă limitată a.s. de intrare implică caracterul limitat în timp a răspunsului $y(t)$.

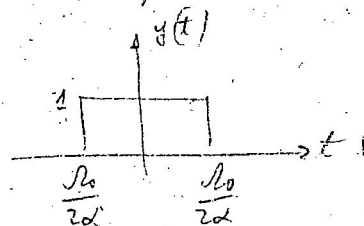
Pentru cazul particular:

$$F(2\alpha t) = p_{\Omega_0}(2\alpha t)$$

$$2\alpha t = \Omega_0 \rightarrow t = \frac{\Omega_0}{2\alpha}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\Omega_0}(2\alpha t) dt = \int_{-\frac{\Omega_0}{2\alpha}}^{\frac{\Omega_0}{2\alpha}} dt = \frac{\Omega_0}{\alpha}$$

$$\boxed{\frac{\Omega_0}{\alpha} < A}$$

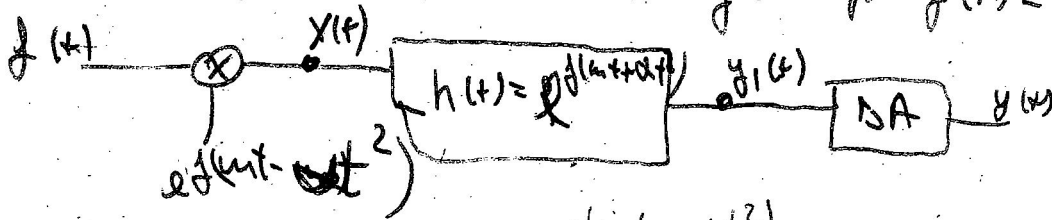


$$1) |H(\omega)| = 1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt \quad \text{dieses } x(t) = \begin{cases} x(t) & t \in [0, T_0] \\ 0 & t > T_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt + \int_{T_0}^{+\infty} |y(t)|^2 dt \text{ es sel.}$$

2) $f(t)$ debeds limitato ro det $y(t)$ pti $f(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}$



$$x(t) = \cancel{f(t)} \cdot e^{j(\omega_0 t - \alpha t^2)} = f(t) \cdot e^{j(\omega_0 t - \alpha t^2)}$$

$$X(\omega) \cdot H(\omega) = Y_1(\omega) \Rightarrow y_1(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{j(\omega_0 \tau - \alpha \tau^2)} e^{j(\omega_0 (t-\tau) - \alpha (t-\tau)^2)} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{j(\omega_0 \tau - \alpha \tau^2)} \cdot e^{j(\omega_0 t - \omega_0 \tau - \alpha t^2 + 2\alpha t\tau - \alpha \tau^2)} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{j(\omega_0 t - \alpha t^2)} e^{j(2\alpha t\tau)} d\tau = F(2\alpha t) e^{j(\omega_0 t - \alpha t^2)} \Rightarrow$$

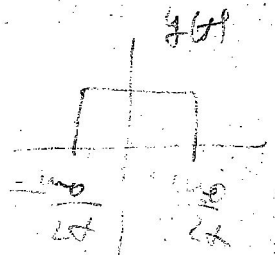
$$y_1(t) = F(2\alpha t) e^{j(\omega_0 t - \alpha t^2)} = F(2\alpha t)$$

$$f(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} = \frac{2}{T} \frac{\sin \omega_0 t}{\frac{2\pi}{T} t} = \frac{2}{T} \text{sinc } \omega_0 t$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{T} \frac{\pi}{\omega_0} & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2\pi}{T\omega_0} & \omega < \omega_0 \\ 0 & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

$$F(2\alpha t) = 1$$

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\omega_0}{2\alpha} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



$$2\alpha t = \omega_0 \Rightarrow t = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

$$y(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{\omega_0}{2\alpha} < t < \frac{\omega_0}{2\alpha} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

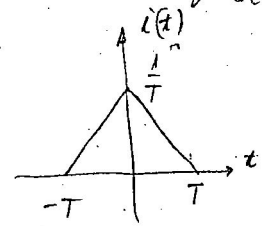
③

Să se determine clasa de semnale $g(t)$ pentru care

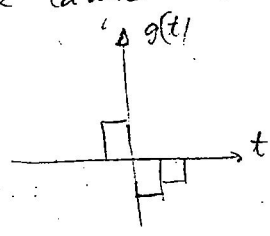
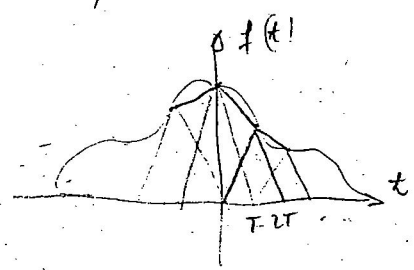
$$G(u) = j\omega \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(u - n) \quad \text{cu } F(u) \text{ arbitrar}$$

Soluție

$g(t)$ este derivata unui semnal $g_1(t)$ cu modulație impulsivă și amplitudine (de tip cu rețineră), impulsurile fiind triunghiulare



$g_1(t)$ reprezintă deci semnale care aproximează pe $f(t)$ prin interpolare liniară, derivata lui $g_1(t)$ fiind deci un semnal format din peste de timp de lățime T decalate, și de amplitudine egală cu derivata lui $g_1(t)$.



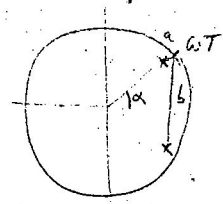
④ Un sistem discret ac f.d.t.

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 2r \cos \alpha + r^2}$$

se presupune $1 - r < 1$

Se cere, folosind cele mai simple aproximații Taylor, să se det. banda la 3 decibeli a sistemului.

Soluție



$$|a| = |e^{j\omega T} - re^{j\alpha}| \approx |1 - r + j(\omega T - \alpha)| = \sqrt{(1-r)^2 + (\omega T - \alpha)^2}$$

$$b \approx 2 \sin \alpha$$

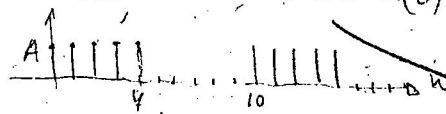
$$|H(e^{j\omega T})| \approx \left| \frac{1}{2 \sin \alpha [1 - r + j(\omega T - \alpha)]} \right| = \frac{1}{2 \sin \alpha \sqrt{(1-r)^2 + (\omega T - \alpha)^2}}$$

H_{max} este pt $\omega_r \approx \frac{\alpha}{T}$, banda la 3 db este $\approx \frac{(1-r)}{T}$

cau $\omega T - \alpha = \pm(1-r) \Rightarrow \omega = \frac{1-r+\alpha}{T} = \omega_r \pm \frac{(1-r)}{T}$

⑤

Să se determine nico condiții ^{aproximativ} sistemului $H(z) = \frac{1}{z+0.5}$ $\alpha < 1$ la excitația periodică



nu depășește valoarea KA . Dăruie.

Soluție: $Y(z) = H(z) \cdot E(z)$; $F_e[n]$ cuiperiodică. $E(z) = \sum_n e^{j\omega n} \delta[n - KN] \Leftrightarrow E_g(z) [1 + z^{-N} + \dots]$

$$= \frac{E_g(z)}{1 - z^{-N}}; \quad Y(z) = \frac{H(z) \cdot E_g(z)}{1 - z^{-N}} = Y_e(z) + Y_p(z) = Y_e(z) + \frac{Y_g(z)}{1 - z^{-N}} \Rightarrow Y_g(z) = H(z) \cdot E_g(z) - Y_e(z)$$

$$Y_e(z) = \frac{H(z) \cdot E_g(z)}{1 - z^{-N}} \Big|_{z=}$$

III

$$H(z) = \frac{k}{(z - \alpha)^2} \rightarrow Y_p(z) = ?$$

$$N=6, \quad \sigma(u) = q^{u-3}, \quad k=1, \quad \alpha=0.5$$

$$Y_g(z) = H(z) X_g(z) - Y_e(z) [1 - z^{-N}]$$

$$X_g(z) = \frac{z}{z-1} - z^{-3} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z-1} \cdot (1 - z^{-3}) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1-z^3}{z^3}$$

$$Y(z) = \frac{1}{(z-0.5)^2} \cdot \frac{z}{z+1} \cdot \frac{z^3}{z^3+1}$$

$$\left(\sum_{p_H} \text{Res } Y(z) \right) [1 - z^{-N}]$$

$$\text{Res} = \frac{1}{(u-1)!} \frac{d^u}{dz}$$

$$\text{Res} = \frac{1}{(u-1)!} \frac{d^u}{dz}$$

etapa locală 1988 (bursă)

- ①. Dăm să reprezentăm semnalele în raport cu clase de semnale elementare independente

$$\varphi(t-\tau) = e^{-a|t-\tau|} \quad a > 0 \quad \text{Bor dimensiune, timp}$$

Formid. transformare integrală de forma:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\tau) e^{-a|t-\tau|} d\tau$$

unde $\tilde{F}(\tau)$ este densit. spectr. a mp. cu $\varphi(t-\tau)$
 Se cere să se determine formula de calcul a lui $\tilde{F}(\tau)$

$$\varphi(t) \Leftrightarrow \Phi(\omega) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2} ;$$

$$\frac{1}{\Phi(\omega)} = \frac{a}{2} \left\{ 1 - \frac{(j\omega)^2}{a^2} \right\} \rightarrow$$

căutăm o f. de forma: $\tilde{F}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) A(\tau, t) dt$

cu proprietatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau) A(\tau, \tau) d\tau = \delta(t-\tau)$$

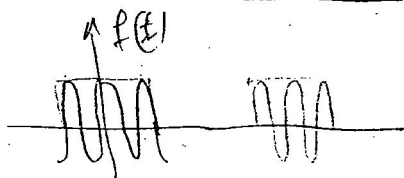
$$\tilde{F}(\omega) = \mathcal{F}\{\tilde{F}(\tau)\} \cdot \Phi(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau) A(\tau-\tau) d\tau = \delta(t)$$

$$\mathcal{F}\{\tilde{F}(\tau)\} \mathcal{F}\{A(\tau)\} = 1 \quad \text{unde}$$

$$A(t) = \frac{a}{2} \left[\delta(t) - \frac{1}{a^2} \delta''(t) \right]$$

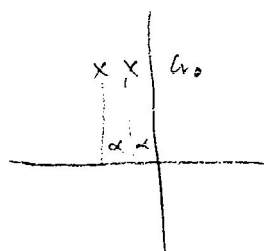
$$\text{deci } u(\tau) = \frac{a}{2} \left\{ x(\tau) - \frac{1}{a^2} x''(\tau) \right\}$$



$$f(t) = \sum g(t - nT)$$

Se cere ca să se scrie o funcție care să descrie un astfel de semnal

semnal și alt. per. KT Discontinuu



indici de mod. și val. de $2\pi n$. ω_0

$$1) \quad \mathcal{L}(t-\tau) = e^{-a|t-\tau|}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) e^{-a|t-\tau|} d\tau$$

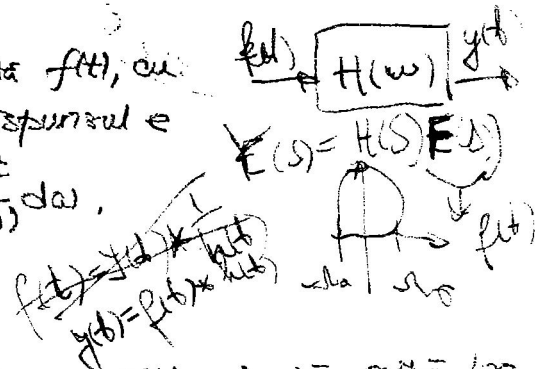
$$\mathcal{L}(t-\tau) \longleftrightarrow \frac{2a}{\omega^2 + a^2} e^{-j\omega\tau}$$

Concursul profesional "Tr. Tănăsescu"
etapa locală

1. Se consideră semnalul de bandă limitată $f(t)$, cu banda Ω_0 , ce se aplică sistemului $H(\omega)$; răspunsul e $y(t)$.

Se mai consideră $g(t) = \frac{1}{2\Omega_0} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} \frac{e^{j\omega t}}{H(\omega)} d\omega$.

Să se arate că $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)g(t-nT)$.



2. Determinați condițiile ce trebuie satisfăcute de $f(t)$ a.ș. să aibă loc relația:

a) $T' \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n\Omega)|^2 = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n\Omega')|^2$, $T' = \frac{2\pi}{\Omega'}$; $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

b) $T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(nT)|^2 = T' \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(nT')|^2$.

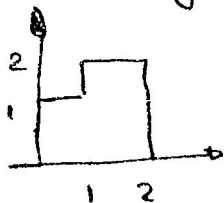
3. Un semnal de bandă limitată la Ω_0 modulează MA-BLU o purtătoare de frecvență ω_0 (cu BLD).

Se eșantionează natural acest semnal cu un semnal periodic obținut prin repetarea fără generatoare $f_g(t)$. (Ce condiție trebuie să îndeplinească frecvența purtătoare și $f_g(t)$ pentru ca din semnalul rezultat să se poată obține prin decodare cu un detector sincron semnalul modulator inițial)

4. Să se determine funcția de transfer $H(s)$ a sistemului ce are funcția pondere originalul lui $F(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ multiplicat cu $\tau(t)$

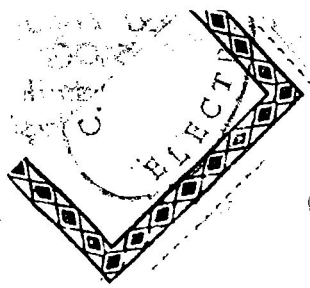
5. Să se determine $H(z)$ fracție rațională de z (sistemul fiind stabil) pentru care $|H(e^{j\omega T})|^2 = \frac{5-4\cos\omega T}{10-6\cos\omega T}$

6. Un semnal de bandă limitată e eșantionat ideal cu rata Nyquist. Trece printr-un integrator ideal că răspunsul $y(t)$.



Să se determine semnalul și răspunsul sistemului cu $H(s) = \frac{1}{s+2}$ la semnalul periodic obținut prin repetarea lui $y(t)$, cu $T=4$ pe formula Pohtsă.

$F(s) = \frac{Y(s)}{H(s)}$ $\Rightarrow 2H = \frac{1}{s+2} \Rightarrow H = \frac{1}{2(s+2)}$ $\Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2 \cdot \text{rect}(\frac{t-nT}{2})$



$$1) f(t) \text{ is } g(t) = \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{y(\omega)}{H(\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} y(\omega_0) g(t - nT)$$

$$f(t) \xrightarrow{H(\omega)} y(t) \quad y(t) = F(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(\omega) \frac{e^{j\omega t}}{H(\omega)} d\omega$$

$$G(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{y(\omega)}{H(\omega)} e^{j\omega t} d\omega \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{H(\omega)} \frac{2\omega_0}{2\pi} dt =$$

$$= \frac{1}{H(\omega)} \omega_0 \frac{T}{2}$$

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{\omega_0 \omega_0} \cdot G(\omega) \frac{2}{T} \rightarrow f(t) = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{Y(\omega)}{\omega_0 \omega_0} \cdot G(\omega) \frac{2}{T} \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi T} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{Y(\omega)}{\omega_0 \omega_0} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

1. Se știe: $Y(\omega) = F(\omega)H(\omega)$ care este de bandă limitată

$$G(\omega) = \frac{T}{2} \frac{p_{\Omega_0}(\omega)}{H(\omega)}, \text{ de asemenea limitată la } \Omega_0$$

$$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega) \Rightarrow F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} = Y(\omega) \left(\frac{T}{2} \frac{p_{\Omega_0}(\omega)}{G(\omega)} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{2}{T} \frac{Y(\omega)G(\omega)}{p_{\Omega_0}(\omega)}$$

Fiind de bandă limitată, se poate scrie:

$$f(t) = \frac{2}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} Y(\omega)G(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{2}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} Y(\omega)G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\text{Deci } f(t) = \frac{2}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} Y(\omega)G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\text{Pe de altă parte } Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \text{ care se mai}$$

poate scrie și sub formă:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau) d\tau$$

$$\text{Deci } \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} F(\omega)H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau) d\tau$$

Analog rezultă

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)g(t-\tau) d\tau$$

Dar $y(t)$ e de bandă limitată, deci

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) \text{sinc}(t-nT)$$

și la fel:

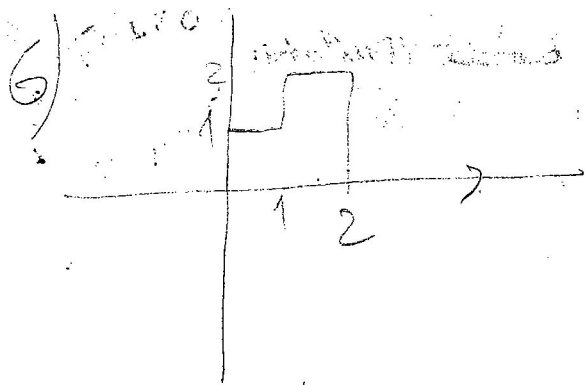
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) \text{sinc}(t-nT)$$

adică

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) g(t-nT)$$

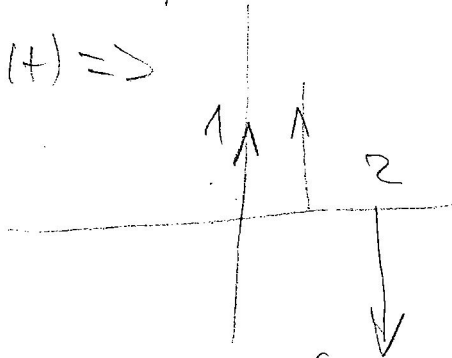
care

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc} \tau \text{sinc}(t-nT-\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t-nT \neq 0 \\ T, & t-nT = 0 \end{cases}$$



$$H(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$y'(t) \Rightarrow$$



$$f(t)$$

$$f_e(t) = f(t) \delta(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = \sqrt{t} + \sqrt{t-1} - 2\sqrt{t-2}$$

$$y(\omega) = \frac{F(\omega) * \mathcal{R}_0 \delta_0 \tilde{I}_m}{j\omega} \Rightarrow$$

$$\frac{F(\omega) * \mathcal{R}_0 \delta_0 \tilde{I}_m}{j\omega} = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \left(e^{-j\omega} - 2 \left(\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right) e^{-2j\omega} \right)$$

$$F(\omega) * \mathcal{R}_0 \delta_0 \tilde{I}_m = 1 + e^{-j\omega} - 2e^{-2j\omega} + j\omega \pi \delta(\omega) * (1 + e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega})$$

$$= (1 + e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega}) (1 + j\omega \pi \delta(\omega))$$

$$y'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) (1 + e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega}) d\omega$$

2. a) $F(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(n\Omega) \operatorname{sinc}(\omega - n\Omega)$

și nu acest caz $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$ reprezintă chiar energia semnalului

Deci ar trebui să avem

$$\frac{1}{T} E = \frac{1}{T'} E, \text{ deci } T^2 = T'^2$$

Dacă $T = T'$, relația e valabilă și $f(t) \in L^2$

Dacă $T \neq T'$, relația nu e valabilă în general, decât pt. $f(t) = 0$
(care are $E = 0$)

b) La fel, $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(nT) \operatorname{sinc}(t - nT)$

$$\text{și deci } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = T \sum_{-\infty}^{\infty} |f(nT)|^2 = E$$

și deci ~~rezultă o identitate~~ rezultă o identitate

Relația e valabilă atunci când $f(t) \in L^2$
(caci egalitatea a două numere diferite nu are sens)

$$T' \sum_{-\infty}^{\infty} |F(n\Omega)|^2 = T \sum_{-\infty}^{\infty} |F(n\Omega')|^2$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad T' = \frac{2\pi}{\Omega'}$$

$$T \sum_{-\infty}^{\infty} |f(nT)|^2 = T' \sum_{-\infty}^{\infty} |f(nT')|^2$$

$$F(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(n\Omega) \operatorname{sinc}(\omega - n\Omega)$$

$$F(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} \Leftrightarrow f(t) \quad h(t) = \frac{1}{t} \sqrt{1-t}$$

$$H(s) = F(s) = \frac{2s}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow |H(e^{j\omega T})|^2 = \frac{5 - 4 \cos \omega T}{10 - 6 \cos \omega T} \Rightarrow H(z) = \frac{5 - 4 \frac{z+z^{-1}}{2}}{10 - 6 \frac{z+z^{-1}}{2}} = \frac{5 - 2z - 2z^{-1}}{10 - 3z - 3z^{-1}}$$

$$z = e^{j\omega T}$$

$$|H(z)|^2 = \frac{-2z^2 + 5z - 2}{10z - 3z^2 - 3} = \frac{2z^2 - 5z + 2}{3z^2 - 10z + 3} = \frac{2}{3} \frac{(z^2 - \frac{5}{2}z + 1)}{z^2 - \frac{10}{3}z + 1} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{(z - \frac{5}{4})^2 - \frac{9}{16}}{(z^2 - \frac{10}{3}z + 1)} = \frac{2}{3} \frac{(z - \frac{5}{4})^2 - (\frac{3}{4})^2}{(z - \frac{5}{3})(z - \frac{1}{3})} = \frac{2}{3} \frac{(z - \frac{5}{4} - \frac{3}{4})(z - \frac{5}{4} + \frac{3}{4})}{(z - 3)(z - \frac{1}{3})} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{(z - 2)(z - \frac{1}{2})}{(z - 3)(z - \frac{1}{3})} = \frac{2}{3} \frac{z^2 - \frac{1}{2}z - 2z + 1}{(z - 3)(z - \frac{1}{3})} =$$

$$\frac{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}{(z - 3)(z - \frac{1}{3})} = \frac{A}{z - 3} + \frac{B}{z - \frac{1}{3}} \Rightarrow A + B = -\frac{5}{2}$$

$$-\frac{A}{3} - 3B = 1$$

$$A = -3 - 9B \quad -3 - 8B = -\frac{5}{2} \quad 8B = \frac{5}{2} - 3$$

$$B = \frac{5}{16} - \frac{3}{8} = \frac{5}{16} - \frac{6}{16} = -\frac{1}{16}$$

$$A = -3 + 9 \cdot \frac{1}{16} = \frac{-48 + 9}{16} = -\frac{39}{16}$$

$$|H(z)|^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{39}{16} \cdot \frac{1}{(z - 3)(z - \frac{1}{3})} = \frac{13}{8(z - 3)(z - \frac{1}{3})}$$

$$|H(z)|^2 = \frac{13}{8(z - 3)(z - \frac{1}{3})} \Rightarrow \dots$$

$$-\frac{57}{48} + \frac{2}{16} = 1 \quad \frac{13}{16}$$

$$4. F(\omega) = \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} f(t)$$

Știm că $h(t) = f(t) \cap(t)$, rezultând că transformata Laplace unilaterală $\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = H(\omega) \Big|_{\omega = \frac{s}{j}}$

$$\text{Deci } H(s) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - s^2}$$

$$5. \text{ Pe conturul } |z|=1, z = e^{j\omega T} \text{ și deci } \cos \omega T = \frac{z + z^{-1}}{2}, \text{ rezultând}$$

$$|H(z)|^2 = \frac{5 - 2(z + z^{-1})}{10 - 3(z + z^{-1})} = \frac{2z^2 - 5z + 2}{3z^2 - 10z + 3}$$

Deci luăm $H(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, atunci $|H(z)|^2 = H(z)H^*(z^*) = \frac{(az+b)(az^*+b^*)}{(cz+d)(cz^*+d^*)} =$

$$= \frac{aa^*z^2 + ba^*z + ab^*z + bb^*}{cc^*z^2 + dc^*z + cd^*z + dd^*} = \frac{|a|^2z^2 + (a^*b + ab^*)z + |b|^2}{|c|^2z^2 + (dc^* + cd^*)z + |d|^2}$$

și identificăm $|a| = |b| = |c| = |d| = \sqrt{3}$

Deci $a = |a|e^{j\varphi_a}; b = |b|e^{j\varphi_b}; c = |c|e^{j\varphi_c}; d = |d|e^{j\varphi_d}$ se scrie:

$$H(z) = \frac{|a||b|}{|c||d|} \frac{e^{j\varphi_a} + e^{j\varphi_b}}{e^{j\varphi_c} + e^{j\varphi_d}} = \frac{|a||b|}{|c||d|} \frac{e^{j\varphi_a} + e^{j\varphi_b}}{e^{j\varphi_c} + e^{j\varphi_d}}$$

$$|H(z)|^2 = \frac{|a|^2z^2 + 2|a||b|\cos(\varphi_a - \varphi_b)z + |b|^2}{|c|^2z^2 + 2|c||d|\cos(\varphi_c - \varphi_d)z + |d|^2}$$

de unde rezultă $\cos(\varphi_a - \varphi_b) = \cos(\varphi_c - \varphi_d)$

$$|H(z)|^2 = \frac{2(z^2 - \frac{5}{2}z + \frac{25}{16}) - \frac{9}{16}}{3(z^2 - \frac{10}{3}z + \frac{25}{9}) - \frac{16}{9}} = \frac{2(z - \frac{5}{4})^2 - (\frac{3}{4})^2}{3(z - \frac{5}{3})^2 - (\frac{4}{3})^2} = \frac{[\sqrt{2}(z - \frac{5}{4}) - \frac{3}{4}][\sqrt{2}(z - \frac{5}{4}) + \frac{3}{4}]}{[\sqrt{3}(z - \frac{5}{3}) - \frac{4}{3}][\sqrt{3}(z - \frac{5}{3}) + \frac{4}{3}]}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{(z - \frac{5}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4})(z - \frac{5}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4})}{(z - \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3})(z - \frac{5}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3})}$$

Pentru a avea un sistem cu $H(z)$ stabil e necesar ca $|z| < 1$, deci polul $z = \frac{5 + 4\sqrt{3}}{3}$ nu este al lui $H(z)$.

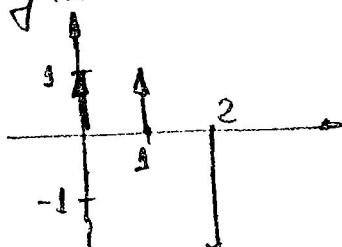
$$\text{Deci } H(z) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{z - \frac{5 + \sqrt{2}}{4}}{z - \frac{5 + 4\sqrt{3}}{3}} \text{ sau } H(z) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{z - \frac{5 + \sqrt{2}}{4}}{z - \frac{5 + 4\sqrt{3}}{3}}$$

6. Trebuie $f(t)$ semnalul de bandă limitată; semnalul egantronat va fi $f_e(t) = f(t) \cap(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(t) \cap(t) dt, \text{ deci } Y(\omega) = \frac{F(\omega) * \mathcal{L}\{\cap(t)\}(\omega)}{j\omega}$$

unde $\mathcal{L}\{\cap(t)\}$ este chiar banda $F(\omega)$.

$y'(t)$ are ca în figura:



Deci

$$f(t) = \text{șurc } \mathcal{L}_0 t + \text{șurc } \mathcal{L}_0(t-1) - 2\text{șurc } \mathcal{L}_0(t-2)$$

$$\text{unde } \text{șurc } x = \frac{\sin x}{x}$$

$Y_g(s) = \frac{1}{s}(1 + e^{-s} - 2e^{-2s})$. Notăm $z(t)$ răspunsul lui $H(s)$ la $y(t) * \delta_4(t)$

$$Z(s) = \frac{Y_g(s)H(s)}{1 - e^{-4s}} = \frac{1}{1 - e^{-4s}} \cdot \frac{1}{s(s+2)} (1 + e^{-s} - 2e^{-2s})$$

$$Z_e(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{\frac{1}{2}(1 + e^{-2s} - 2e^{-4s})}{1 - e^{-4s}} = \frac{1 + e^{-2s} - 2e^{-4s}}{e^{-2s} - 1} \cdot \frac{1}{s+2} = A \cdot \frac{1}{s+2}$$

Deci

$$Y_g(s) = \frac{1}{s(s+2)} (1 + e^{-s} - 2e^{-2s}) - \frac{A}{s+2} (1 - e^{-4s}) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) (1 + e^{-s} - 2e^{-2s}) - \frac{A}{s+2} (1 - e^{-4s})$$

$$z_g(t) = \frac{1}{2} \left\{ [y(t) + y(t+1) - 2y(t+2)] - [e^{-2t}y(t) + e^{-2(t-1)}y(t-1) - 2e^{-2(t-2)}y(t-2)] \right\} - A [e^{-2t}y(t) - e^{-2(t-4)}y(t-4)]$$

3. Notăm $x_{BLU}(t)$ semnalul obținut prin modularea ^{MA} cu bandă laterală unică (dreaptă) a portantei cu ω_0 și fie $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ semnalul modulator.

Atunci $x_{BLU}(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega + \omega_0) \stackrel{wt}{=} X_{BLU}(\omega)$

Semnalul cu care se eantionează este

$$e(t) = f_g(t) * \delta_T(t) \xleftrightarrow{F} F_g(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Omega_0) \quad \text{cu } \Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Rezultă la ieșirea circuitului de eantionare semnalul

$$z(t) = e(t) x_{BLU}(t) \xleftrightarrow{F} Z(\omega) = E(\omega) * X_{BLU}(\omega)$$

Prin deplasare sincronă și trecere prin FTJ ~~de bandă largă~~ realizăm o nouă modulare MA cu BLU (stnga), deci semnalul rezultat va fi $z(t)$, ~~de bandă largă~~ ~~de bandă largă~~

adică $R(\omega) = Z(\omega - \omega_0)$, deci se poate scrie relația:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_g(\omega - \omega_0 - k\Omega_0) \delta(\omega - \omega_0 - k\Omega_0) * X(\omega) = X(\omega)$$

sau:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_g(k\Omega_0) \delta(\omega - \omega_0 - k\Omega_0) * X(\omega) = X(\omega)$$

care se mai scrie:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_g(k\Omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - k\Omega_0) X(\tau - \omega) d\omega = X(\tau)$$

și punând operațiile de sumare și integrare, rezultă

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_g(k\Omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau - \omega) \delta(\omega - \omega_0 - k\Omega_0) d\omega = X(\tau)$$

deci este verificată relația:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_g(k\Omega_0) X(\omega + \omega_0 + k\Omega_0)$$