Problema 1 (Anca Manolescu – Universitatea Politehnica Bucureşti)

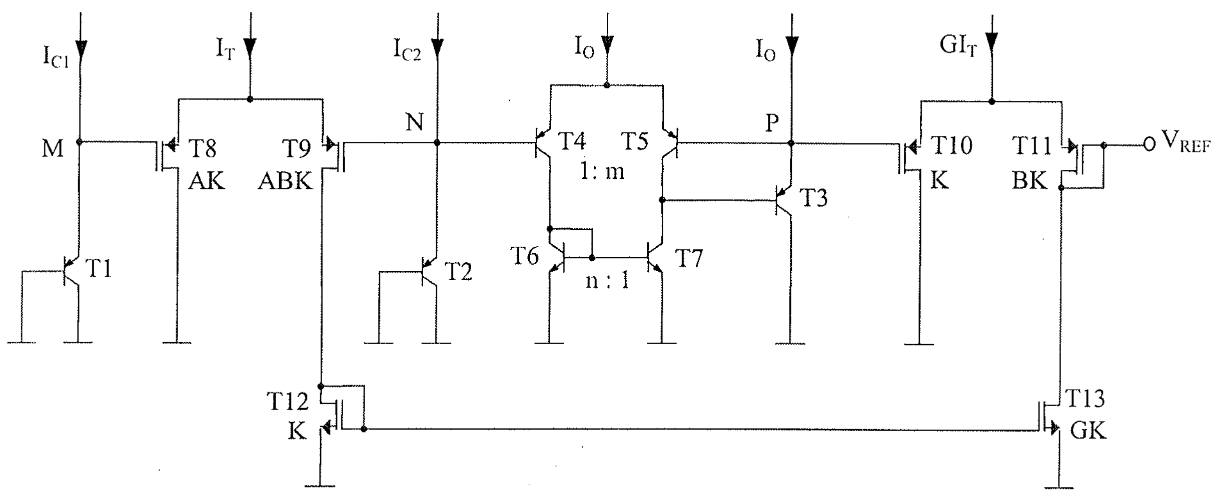
Se consideră referinţa de tensiune din figură în care:

- tranzistoarele MOS sunt polarizate în saturaţie şi au factorii de aspect W/L indicaţi în figură, iar cele de acelaşi tip au aceeaşi tensiune de prag, V_T;
- tranzistoarele bipolare T1 ÷ T3 sunt identice, iar tranzistoarele bipolare T4 ÷ T7 au raportul ariilor menţionat în figură; se vor neglija curenţii de bază;

Se cunoaşte dependenţa de temperatură a curenţilor de colector ai tranzistoarelor T1 şi T2, $I_{C1}(T) = const. \times T^{\alpha}$ şi $I_{C2}(T) = const. \times T^{\beta}$. Se va considera că dependenţa de temperatură a tensiunii bază-emitor este de forma:

$$|v_{BE}(T)| = P + QT + (R - \eta)\frac{kT}{q} ln\left(\frac{T}{T_O}\right)$$

unde R este α, respectiv β pentru tranzistoarele T1 şi T2. P, Q, R şi η sunt constante cunoscute, iar T_O este temperatura de referinţă.



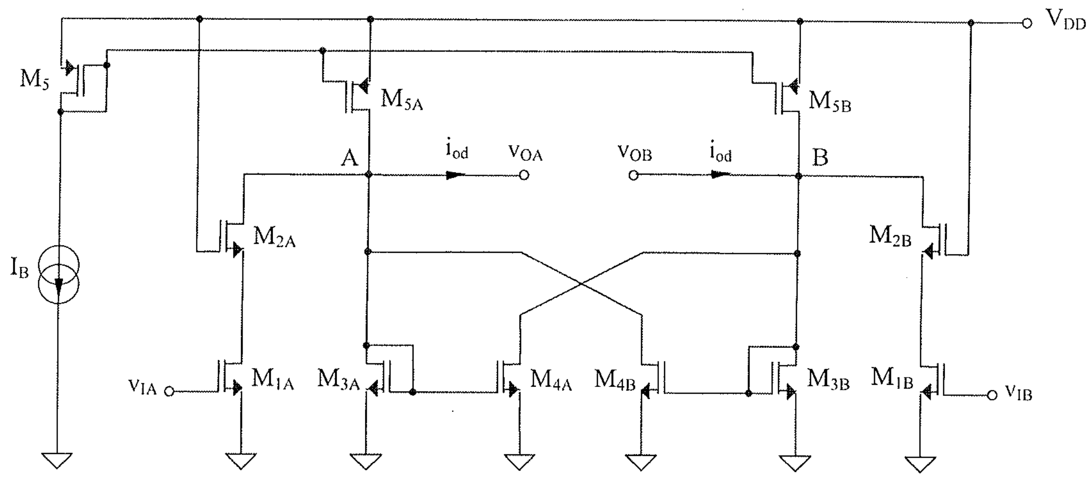
a. Să se determine relaţia care există între tensiunea diferenţială $V_{REF} - V_P$ şi tensiunea diferenţială $V_N - V_M$ în funcţie de parametrii A şi G;

b. Să se determine expresia tensiunii diferenţiale $V_P - V_N$ în funcţie de parametrii m, n, k, q şi de temperatura absolută, T;

c. Să se determine expresia dependenţei de temperatură a tensiunii de referinţă, $V_{REF}(T)$, în funcţie de parametrii circuitului şi de temperatura absolută, T;

d. Să se determine condiţiile necesare pentru a se obţine o tensiune de referinţă independentă de temperatură. Ce expresie are această tensiune?

Problema 2 (Marius Neag – Universitatea Tehnica Cluj-Napoca)



Intre tranzitoarele circuitului din figura exista urmatoarele relatii:
$M_{1A} \equiv M_{1B}$, $M_{2A} \equiv M_{2B}$, $M_{3A} \equiv M_{3B}$, $M_{4A} \equiv M_{4B}$, $M_{5A} \equiv M_{5B} \equiv M_5$; $(W/L)_3 > (W/L)_4$. Toate tranzistoarele sunt polarizate in saturatie si se va neglija efectulul modularii lungimii canalului (rds = ∞).

1. Determinati expresia rezistentei de iesire de semnal mic, intre nodurile A si B.

2. Pentru un semnal de intrare de mod diferential se cere:
   a. Amplificarea in tensiune de semnal mic, mod diferential

$$A_d = \frac{v_{od}}{v_{id}} = \frac{v_{oa} - v_{ob}}{v_{ia} - v_{ib}}$$

   b. Transconductanta de semnal mic, mod diferential

$$G_{md} = \frac{i_{od}}{v_{id}}$$

3. Pentru un semnal de intrare de mod comun se cere amplificarea in tensiune de semnal mic:

$$A_c = \frac{v_{oc}}{v_{ic}} = \frac{0.5 * (v_{oa} + v_{ob})}{v_{ic}}$$; $v_{ia} = v_{ib} = v_{ic}$

4. Determinati domeniul tensiunii de alimentare pentru care toate tranzistoarele sunt polarizate in saturatie (expresia tensiunii de alimentare minime si maxime).

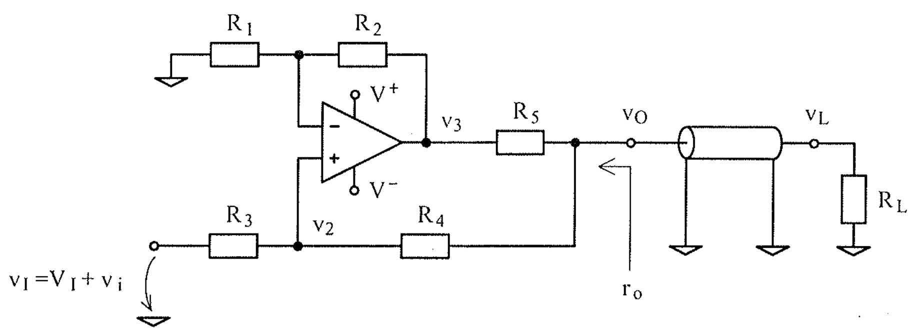
Problema 3 (Radu Belea, Universitatea din Galați)

Amplificatorul operațional din figură emite un semnal TV pe un cablu coaxial cu impedanța caracteristică $Z_C = 75\ \Omega$. Se cunosc: $R_1 = R_2 = R_3 = 10\ k\Omega$, $R_5 = 15\ \Omega$ şi $R_L = 75\ \Omega$. Se cer:

a. Neglijăm atenuarea pe cablul coaxial ($v_L = v_O$). Să se deducă formula de calcul a amplificării $A_v = v_L/v_I$.

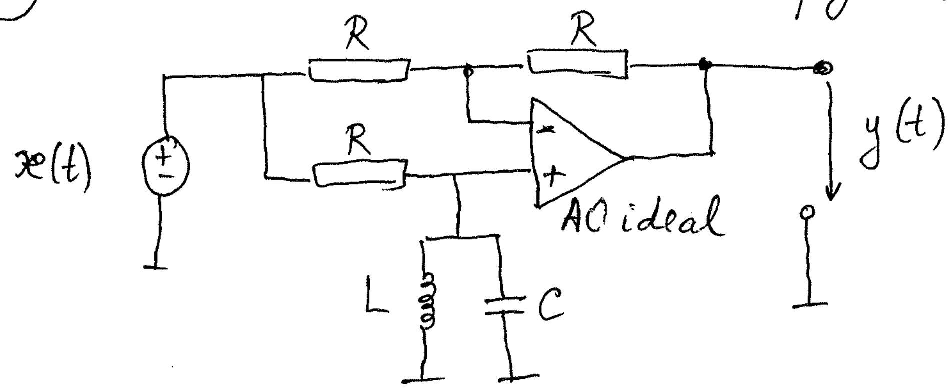
b. Se notează r_o rezistența de ieşire a emițătorului. Să se calculeze valoarea rezistentei R_4 pentru care $r_o = Z_C$. Pentru simplificarea calculelor se neglijează curentul prin rezistența R_4 în comparație cu curentul prin rezistența R_5.

c. Calculați amplificarea în tensiune, A_v, în condiții de adaptare $r_o = Z_C = R_L$.



Concursul profesional "Tudor Tănăsescu"
Secțiunea "Semnale, Circuite și Sisteme"

I Fie circuitul cu A.O. ideal din figură:



Se cere:

a) Să se calculeze funcția de transfer $H(s)$

b) Să se calculeze și reprezinte grafic $|H(j\omega)|$ și $\arg\{H(j\omega)\} = \angle H(j\omega) = \varphi(\omega)$

c) Energia semnalului $y(t)$, când semnalul de intrare $x(t) = \sigma(t) - \sigma(t - t_0)$; $t_0 > 0$

($\sigma(t) = u(t)$ este semnalul treaptă unitate)

II Fie funcția $X(\omega) = \dfrac{1}{\frac{5}{4} + \cos\omega}$. Se cere:

a) Să se reprezinte grafic funcțiile $\left(\frac{5}{4} + \cos\omega\right)$ și $\dfrac{1}{\frac{5}{4} + \cos\omega}$, marcând pe axele de coordonate valorile semnificative, $\omega \in \mathbb{R}$

b) Ținând cont de rezultatele de la a) și de proprietățile transformatei Fourier să se precizeze, justificându-se natura variabilei timp pentru $\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$

c) Utilizând transformatele Fourier elementare corespunzătoare să se determine $\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$.

Se dau:

$$e^{-(\alpha + j\beta)t} \cdot \sigma(t) \xleftrightarrow{T.F.} \frac{1}{\alpha + j\beta + j\omega} \ ; \quad e^{+(\alpha + j\beta)t} \cdot \sigma(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{\alpha + j\beta - j\omega}$$

$$\alpha^{n} \cdot \sigma(n) \xleftrightarrow{TFTD} \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \ ; |\alpha| < 1 \ ; \quad \alpha^{-n} \cdot \sigma(n) \xleftrightarrow{TFTD} \frac{1}{1 - \alpha e^{j\omega}} ; |\alpha|$$

($\sigma(n) = u(n)$ este semnalul treaptă unitate discret)

III.

Sistemul din figura 1 a) se numeşte decimator. Relaţia dintre semnalele de la intrarea şi ieşirea sa este $x_d[n] = x[Mn], M \in N$.

a) Exprimaţi relaţia dintre spectrele semnalelor de la intrarea şi ieşirea decimatorului pentru M=2.

b) Demonstraţi că această relaţie are forma generală :

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\Omega+2k\pi}{M}\right).$$

c) Sistemul din figura 1 b) se numeşte interpolator. Relaţia dintre semnalele de la intrarea şi ieşirea sa este

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n/M], & n \text{ divizibil cu } M \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Demonstraţi că prin conectarea în serie a sistemelor din figurile 1 a) şi 1 b) se obţine sistemul din figura 1 c).

d) Verificaţi afirmaţia de mai sus pentru $x[n] = n$ şi $M = 2$.

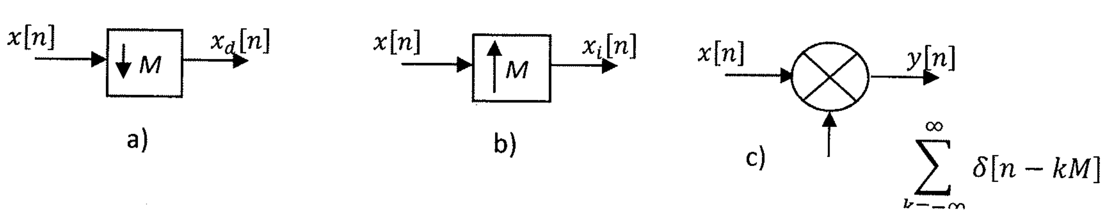
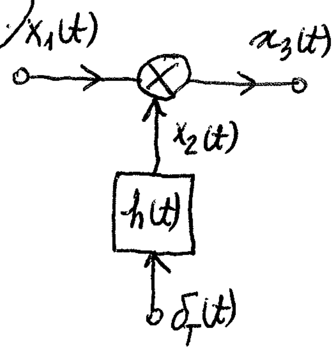


Figura 1. a) Sistem de decimare cu factorul M. b) Sistem de interpolare cu factorul M. c) Sistem de eşantionare ideală în timp discret.

IV.



$$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$

Se consideră schema din figură unde $x_1(t) = A\cdot\frac{\sin\omega_m t}{\pi t}$ şi

$$h(t) = \begin{cases} -\frac{4t}{T} + 1, & \text{pentru } t \in [0, T/2] \\ \frac{4}{T}\left(t - \frac{3T}{4}\right), & \text{pentru } t \in [T/2, T] \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

este funcţia pondere a sistemului analogic liniar şi invariant în timp.

a) Să se reprezinte grafic $x_2(t)$

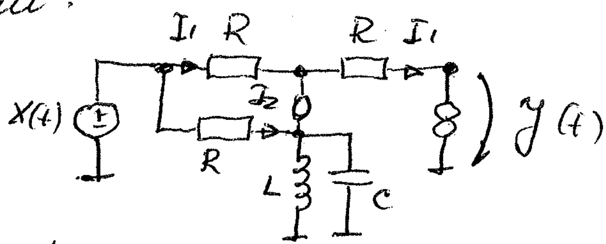
b) Să se facă analiza spectrală a lui $x_3(t)$ şi să se reprezinte grafic spectrul de amplitudini asociat.

c) Să se determine valoarea lui T funcţie de ω_m pentru care $x_1(t)$ poate fi refăcut din $x_3(t)$

d) Să se dea o schemă pentru recuperarea lui $x_1(t)$ din $x_3(t)$.

Rezolvare problema I:

a) Circuitul echivalent:
(3p)



Notăm: $Z_{LC}(s) = \dfrac{1}{sC + \frac{1}{sL}} = \dfrac{sL}{s^2LC+1}$

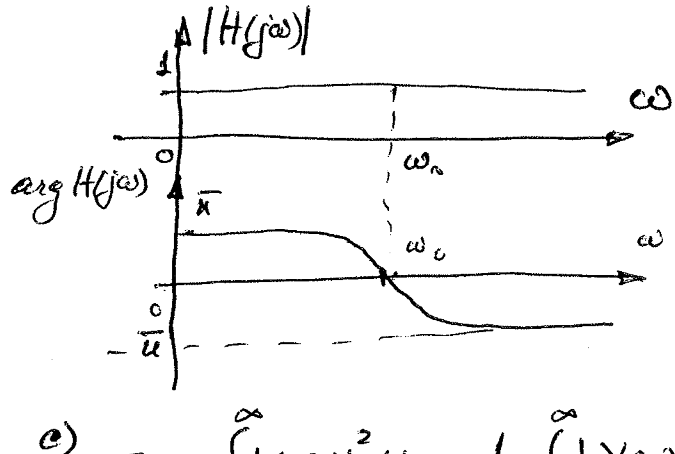
$$I_1 R = I_2 R \Rightarrow I_1 = I_2 \overset{not}{=} I$$

$$\left.\begin{aligned} X(s) &= RI + Z_{LC}(s)\cdot I \\ Y(s) &= -RI + Z_{LC}(s)\cdot I \end{aligned}\right\} \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Z_{LC}(s) - R}{Z_{LC}(s) + R}$$

$$H(s) = \frac{sL - R(s^2LC+1)}{sL + R(s^2LC+1)} = -\frac{s^2 - \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \overset{not}{=} -\frac{s^2 - 2\alpha s + \omega_0^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$

b)
(3p) $|H(j\omega)| = \sqrt{\dfrac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} = 1$

$$\arg H(j\omega) = \pi - 2\begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} & \omega < \omega_0 \\ \pi/2 & \omega = \omega_0 \\ \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{2\alpha\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} & \omega > \omega_0 \end{cases}$$



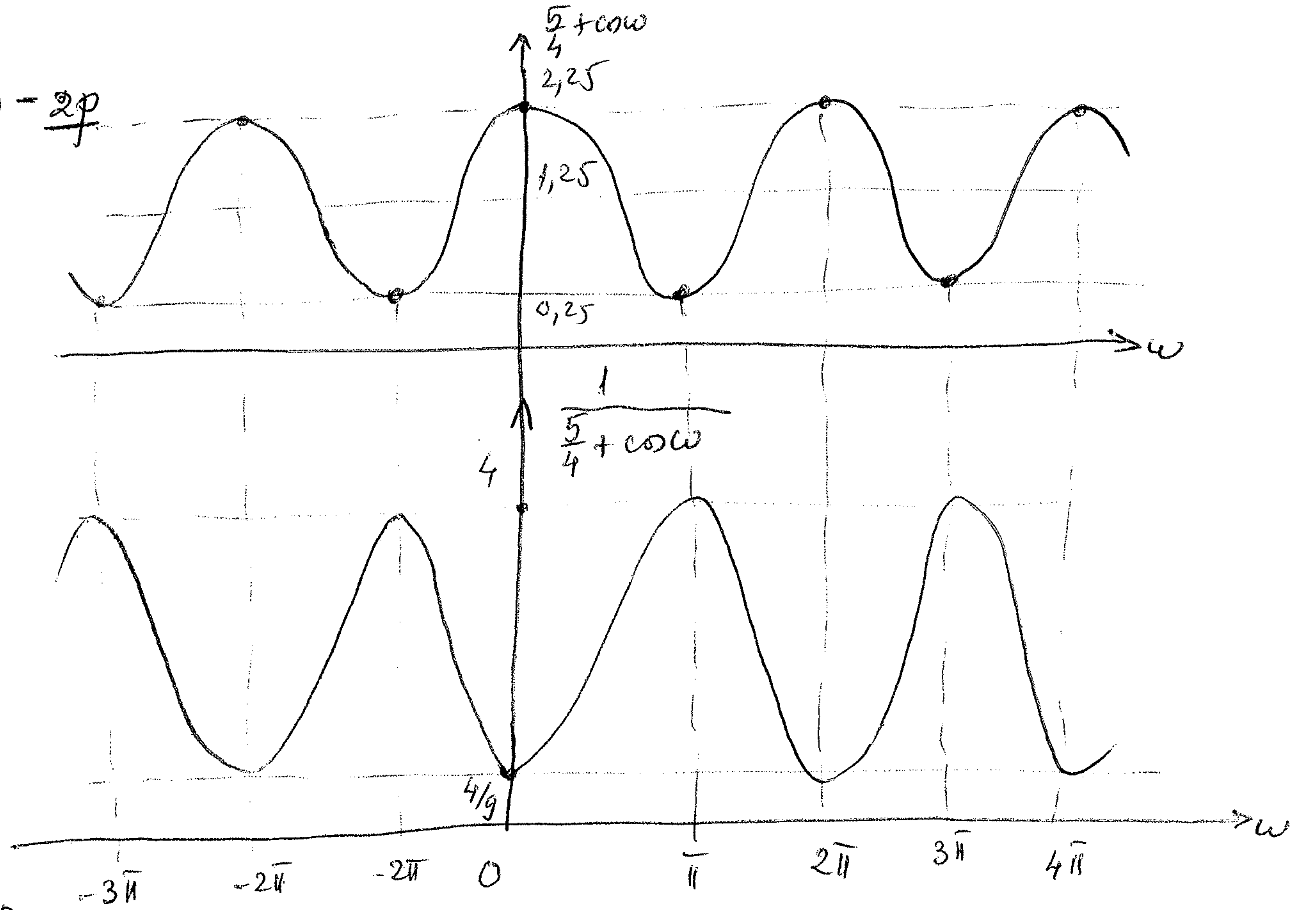
c)
(3p) $E_y = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)\cdot H(j\omega)|^2 d\omega =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 |H(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{t_0} 1^2 dt = t_0$$

(1p) - oficiu

Rezolvare.

a) - 2p



3p

b) $X(\omega)$ este un spectru periodic cu perioada $2\pi \Longrightarrow$ că este vorba de TFTD, adică de semnal discret în timp.

$X(\omega)$ este reală în $\omega \Longrightarrow x(n)$ este un semnal par.

c) Fie $x_1(n) = \alpha^n u(n)\ ;\ |\alpha|<1 \xleftrightarrow{TFTD} X_1(\omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$

4p

$x_2(n) = \alpha^{-n} u(-n)\ ;\ |\alpha|<1 \xleftrightarrow{TFTD} X_2(\omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{j\omega}}$

Cum $x(n)$ este un semnal par $\Rightarrow x(n) = \alpha^{|n|}\ ;\ |\alpha|<1$.

$$X(e^{j\omega}) = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n} e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n} e^{j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n} e^{-j\omega n} = \frac{\alpha e^{j\omega}}{1-\alpha e^{j\omega}} + \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{\cancel{\alpha e^{j\omega}} - \alpha^2 + 1 - \cancel{\alpha e^{j\omega}}}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2} = \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha^{|n|} \xleftrightarrow{TFTD} \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{\text{TFTD}} \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\cos\omega+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}+\cos\omega}$$

$$\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{\text{TFTD}} \frac{1}{\frac{5}{4}+\cos\omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{|n|}\right\} = \frac{1}{\frac{5}{4}+\cos\omega}$$

1p - oficiu

1p. of

SOLUȚIE

2p

a) Pentru M=2, $x_d[n] = x[2n]$.

$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[2n]e^{-jn\Omega}$ şi

$$X\left(\frac{\Omega}{2}\right) = X_d(\Omega) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[2n+1]e^{-j(2n+1)\Omega/2} \qquad (1)$$

respectiv :

$$X\left(\frac{\Omega}{2}+\pi\right) = X_d(\Omega) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[2n+1]e^{-\frac{j(2n+1)\Omega}{2}}e^{-j(2n+1)\pi} = \qquad (2)$$

$$= X_d(\Omega) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[2n+1]e^{-j(2n+1)\Omega/2}$$

Adunând ecuațiile (1) şi (2) membru cu membru şi împărțind rezultatul la 2 se obține:

$$X_d(\Omega) = \frac{X\left(\frac{\Omega}{2}\right)+X\left(\frac{\Omega}{2}+\pi\right)}{2} \quad . \qquad (3)$$

3p

b) Analizând ecuația (3) se constată că ea este identică cu cea din enunț pentru M=2. Membrul drept al ecuației din enunț poate fi pus în forma:

$$\sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\Omega+2k\pi}{M}\right) = \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\left(\frac{\Omega+2k\pi}{M}\right)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\frac{\Omega}{M}n}\sum_{k=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\frac{\Omega}{M}n}\left(1+\sum_{k=1}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{M}kn}\right) \qquad (4)$$

Dar:

$$\sum_{k=1}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} = \sum_{k=1}^{M-1}\left(e^{-j\frac{2\pi}{M}n}\right)^k = \frac{1-e^{-j2\pi n}}{1-e^{-j2\pi n/M}} = 0$$

În consecință ecuația (4) devine:

$$\sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\Omega+2k\pi}{M}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\frac{\Omega}{M}n} \qquad (5)$$

sau, cu schimbarea de variabilă $\frac{n}{M} = p$:

$$\sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\Omega+2k\pi}{M}\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[pM]e^{-j\Omega p} = X_d(\Omega) \text{ (c.c.t.d)} \qquad (6)$$

2,5p

c) Fie $y[n]$ semnalul obținut la ieşirea sistemului format prin conectarea în serie a sistemelor din figurile 1 a) şi 1 b). Notând cu $x_d[n]$semnalul de la ieşirea primului sistem (obținut ca răspuns la semnalul $x[n]$) se poate scrie, pe baza relației intrare-ieşire a celui de al doilea sistem:

$$y[n] = \begin{cases} x_d[n/M], & n \text{ divizibil cu } M \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

sau, ținând seama de relația intrare-ieşire a primului sistem:

$$y[n] = \begin{cases} x[nM/M] = x[n], & n \text{ divizibil cu } M \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \qquad (7)$$

Fie $z[n]$ semnalul de la ieşirea sistemului din figura 1 c). Acesta se poate exprima în forma:

$$z[n] = x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kM] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-kM] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kM]\,\delta[n-kM]. \quad (8)$$

Dacă n nu este multiplu de M, atunci $\delta[n-kM] = 0$ şi în consecinţă $z[n] = 0$. Dacă însă n este multiplu de M, $= pM$, atunci ecuaţia (8) devine:

$$z[n] = x[pM] = x[n].$$

Deci semnalul $z[n]$este identic cu semnalul $y[n]$din ecuaţia (8). Adică, sistemul din figura 1 c) şi sistemul obţinut prin concatenarea sistemelor din figurile 1 a) şi 1 b) răspund la fel la semnalul $x[n]$. În consecinţă, cele două sisteme sunt echivalente.

1,5p

d) În figura următoare se prezintă semnalele $x[n] = n$, $x_d[n]$, $y[n]$ şi $z[n]$, pentru $M = 2$.

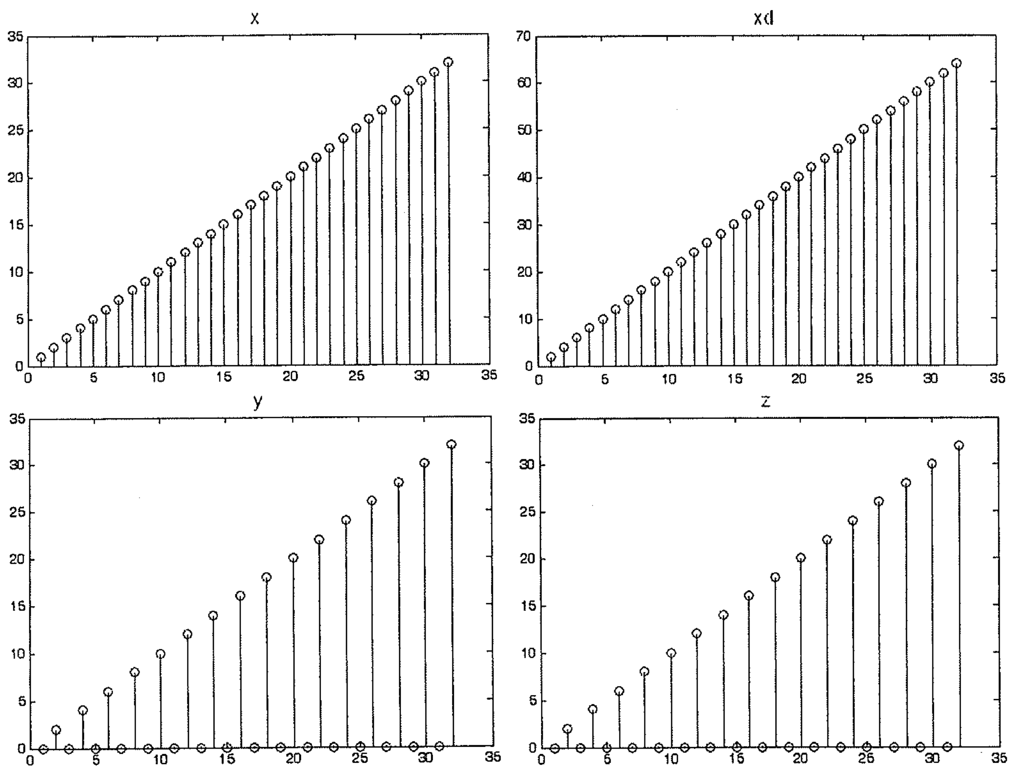
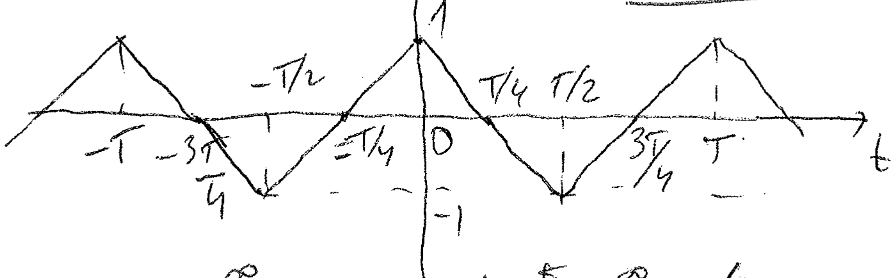


Figura 2. Rezultatul unei simulări Matlab pentru *x* de lungime 32.

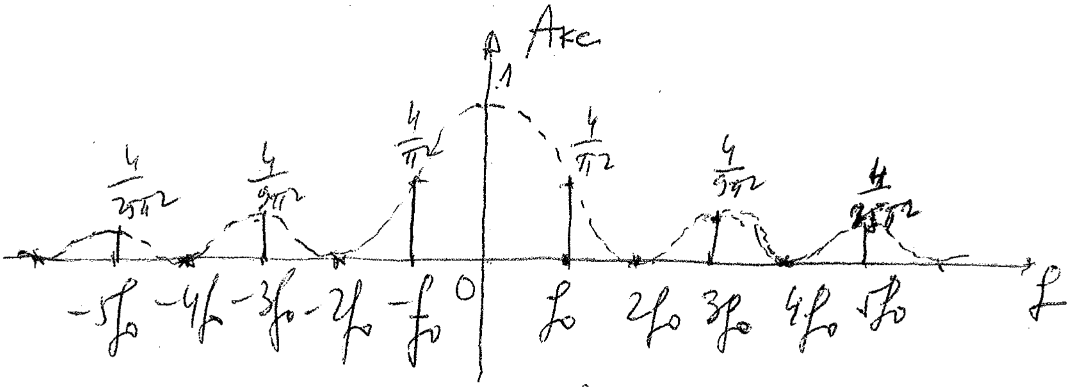
Întrucât cele două grafice de jos sunt identice, rezultă că echivalenţa de la punctul anterior se verifică pentru exemplul considerat.

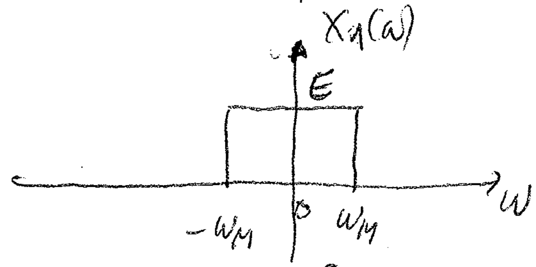
1p a)

Rezolvare Sub. 4



$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2 \frac{k\pi}{2} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \cdot e^{j(2n+1)\omega_0 t}$$





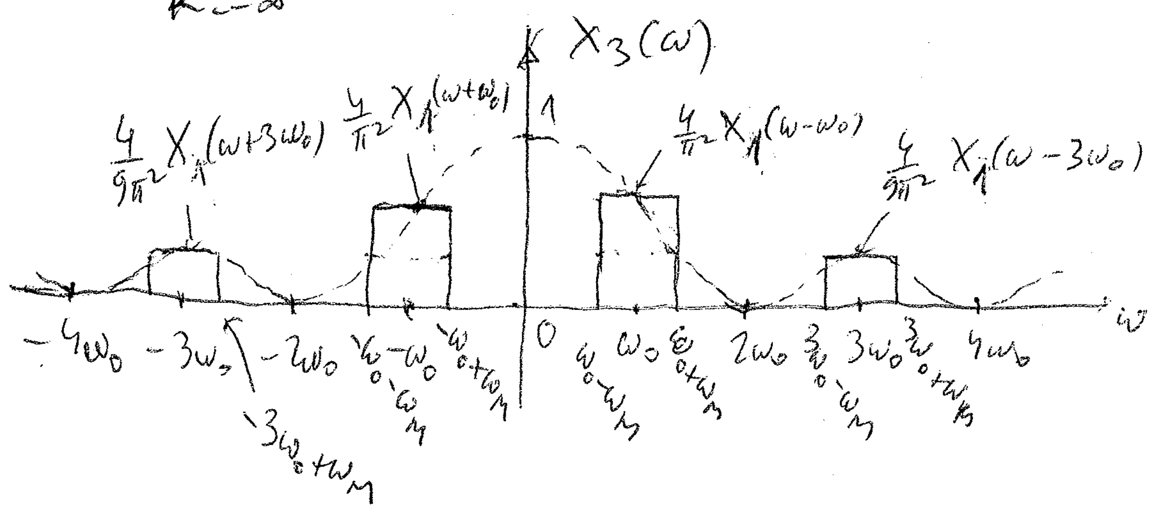
3p

Dacă $x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{kc} e^{jk\omega_0 t}$

$$X_3(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) X_2(\omega-\lambda) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi A_{kc}\,\delta(\omega-\lambda-k\omega_0)\, d\lambda =$$

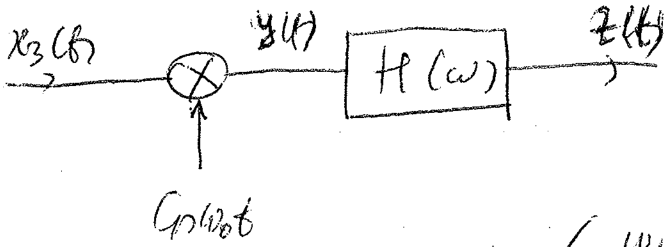
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{kc} X_1(\omega - k\omega_0)$$



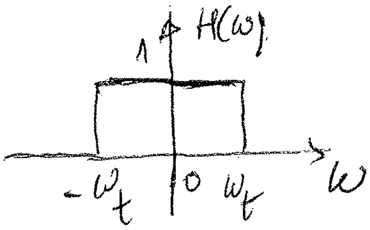
4p

$$3\omega_0 - \omega_M > \omega_0 + \omega_M \rightarrow \omega_0 > \omega_M \rightarrow \frac{2\pi}{T} > \omega_M$$

$$T < \frac{2\pi}{\omega_M}$$



$$\omega_M < \omega_t < 2\omega_0 - \omega_M$$



$$z(t) = \frac{4}{\pi^2} x_1(t)$$

2p