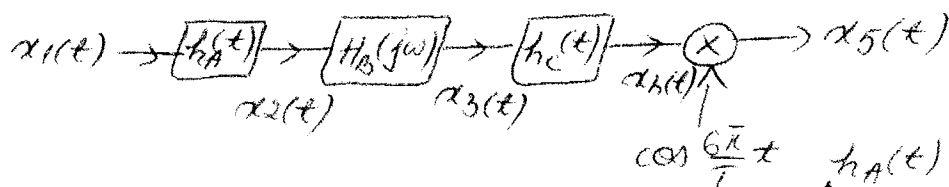


31 mai 2008

PROBLEMA 1 (UNIVERSITATEA AȘUTĂRII DE JOS - GACTI)

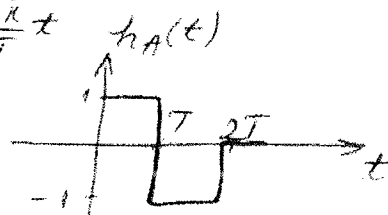
Se consideră schema bloc din figura:

unde: - $h_A(t)$ are forma:

$$- x_1(t) = \delta(t) - \delta(t-2T)$$

$$- H_B(j\omega) = \frac{1}{j\omega T}$$

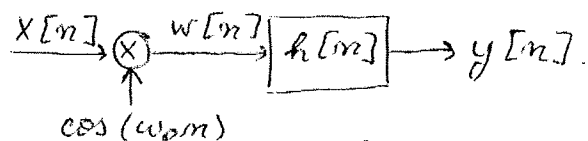
$$- h_C(t) = \frac{4}{T} \text{ sinc}\left(\frac{4\pi}{T} t\right)$$



1. Să se determine forma semnalului $x_2(t)$ și să se calculeze funcția sa spectrală
2. Să se determine forma semnalului $x_3(t)$ și să se calculeze funcția sa spectrală, să se reprezinte calitativ funcția densității spectrale de amplitudine
3. Să se reprezinte funcția densitate spectrală a semnalelor $x_4(t)$ și $x_5(t)$.
4. Care este frecvența de eșantionare maximă cu care poate fi eșantionat semnalul $x_5(t)$. MINIMĂ

PROBLEMA 2 (UNIV. TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA)

Se consideră schema-bloc din figura:

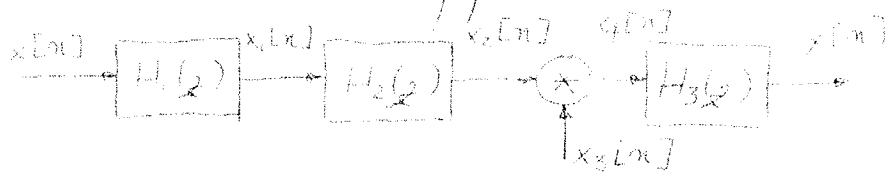


$$\text{unde: } x[n] = \delta[n] + \frac{2w_0}{\pi(2w_0n - 3\pi)}$$

$$h[n] = \cos\left(\frac{w_0n}{3}\right) + \alpha \cdot \cos\left(\frac{w_0n}{3} + \frac{\pi}{4}\right), \quad |w_0| < \pi, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- (a) Să se determine și să se reprezinte grafic modulul și argumentul transformatei Fourier a semnalului $w[n]$.
- (b) Știind că $y[n] = \sqrt{10} \cdot \cos\left(\frac{w_0n}{3} + \beta\right)$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, să se determine α și β .

3. Se dă schema din figură



Blocurile $H_1(z)$, $H_2(z)$ și $H_3(z)$ sunt trei SDLT, având funcții de transfer:

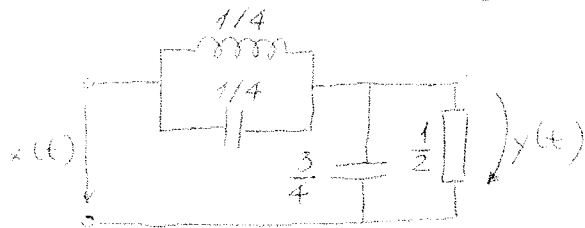
$$H_1(z) = 1 + z^{-1} \quad H_2(z) = z^{-1} - z^{-4} \quad H_3(z) = \sum_{k=0}^{NM-1} h_k z^{-k} \quad N, M \in \mathbb{N}^+$$

$$\text{unde } h_k = \begin{cases} (-1)^p \frac{N!}{p!(N-p)!}, & k = M \cdot p \\ 0, & k \neq M \cdot p \end{cases}$$

$$\text{Se dau: } x_1[n] = \delta[n], \quad x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 6k]$$

- Reprezentati semnalele $x_1[n]$, $x_2[n]$ și $x_4[n]$ în timp și spectrale de amplitudină corepunzătoare.
- Determinati valoarea minimă a lui M a.c. $y[n] = 0$

4. Se consideră circuitul.



- Să se calculeze funcția de transfer $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

$$\text{și funcția pondere } h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

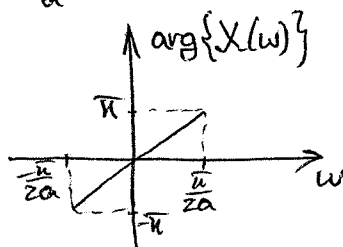
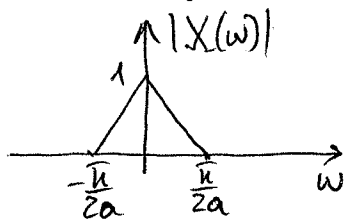
Reprezentati grafic $h(t)$.

- Să se calculeze răspunsul $y_1(t)$ la semnalul $x_1(t) = \frac{2}{3} \cos t \cos 3t$ și să se reprezinte grafic
- Să se calculeze răspunsul $y_2(t)$ la semnalul $x_2(t) = \sin 4t \cdot u(t)$ și să se reprezinte grafic ($u(t)$ este funcția treaptă unitate)

Rezolvare problema 1

(a) $x(t) = x_0(t+2a)$, unde $x_0(t) = \frac{1}{4a} \text{sinc}^2(t \cdot \frac{\pi}{4a})$

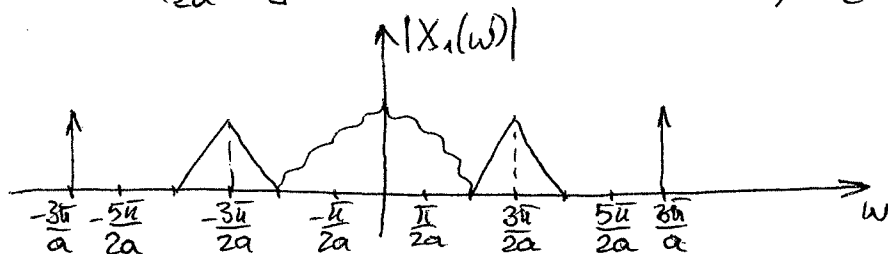
$X_0(\omega) = \text{tri}_{\frac{\pi}{a}}(\omega) \Rightarrow X(\omega) = \text{tri}_{\frac{\pi}{a}}(\omega) \cdot e^{j\omega \cdot 2a}$



2p

(b) - notăm $x_1(t) =$ ieșirea blocului $f(\bullet)$

$x_1(t) = [x(t) + \cos(\frac{3\pi}{2a}t)]^2 = x^2(t) + 2x(t) \cos(\frac{3\pi}{2a}t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\frac{3\pi}{a}t)$



Observație: frecvența maximă a spectrului semnalului $x^2(t)$ este $\frac{\pi}{a}$, dar forma sa nu interesează, deoarece FTS rejectează tot până la frecvența $\frac{5\pi}{2a}$.

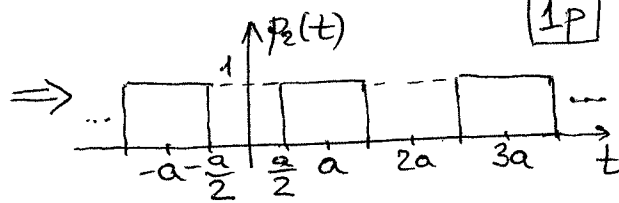
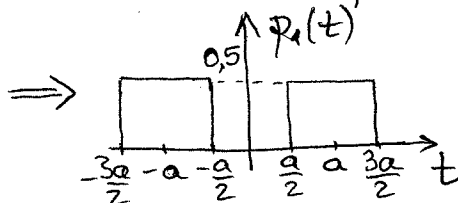
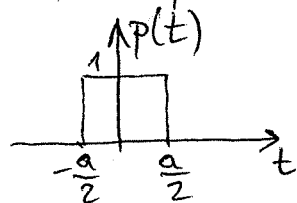
3p

$\Rightarrow y_1(t) = \frac{1}{2} \cos(\frac{3\pi}{a}t) \rightarrow$ ieșirea FTS

0,5p

- notăm $p_1(t) =$ ieșirea blocului H_1 , $p_2(t) =$ ieșirea blocului h_2

1p



- notăm $y_2(t) = p_2(t) \cdot x(t) \Rightarrow Y_2(\omega) = (1 - A_0)X(\omega) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} A_{nc} X(\omega - n \cdot \frac{\pi}{a})$, unde $A_{nc}, A_0 =$ coeficienții complecși și comp. continuă a semnalului $1 - p_2(t)$.

$y(t) = y_1(t) * y_2(t) \Rightarrow Y(\omega) = Y_1(\omega) \cdot Y_2(\omega) = \frac{\pi}{2} \left[\delta(\omega + \frac{3\pi}{a}) + \delta(\omega - \frac{3\pi}{a}) \right] \cdot Y_2(\omega) =$
 $= \frac{\pi}{2} \left[Y_2(-\frac{3\pi}{a}) \delta(\omega + \frac{3\pi}{a}) + Y_2(\frac{3\pi}{a}) \delta(\omega - \frac{3\pi}{a}) \right] =$
 $= \frac{-|A_{3c}|}{4} \cdot \pi \left[\delta(\omega + \frac{3\pi}{a}) + \delta(\omega - \frac{3\pi}{a}) \right] ; A_{3c} = A_{inc}(\frac{3\pi}{2}) = \frac{2}{3\pi}$

$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{6\pi} \cdot \cos(\frac{3\pi}{a}t)$

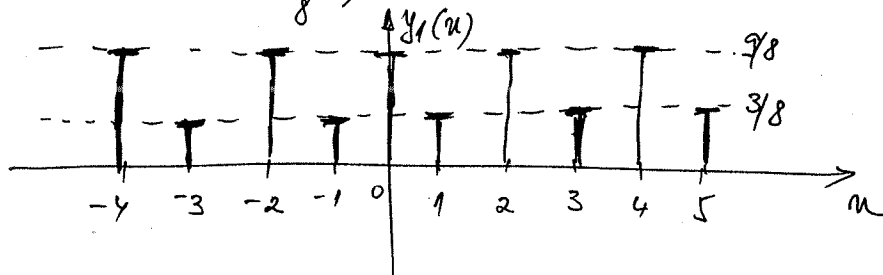
3,5p

c) 1. $\alpha = \frac{1}{3}; \omega_0 = 0 \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}; |z| > \frac{1}{3}$

$$h_1(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{j\pi n}; H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

Var rezultata: $y_1(n) = \frac{1}{2} \cdot H(0) + \frac{1}{2} \cdot H(e^{j\pi}) \Rightarrow y_1(n) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}(-1)^n$

$$y_1(n) = \begin{cases} \frac{9}{8}, & n = 2k; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{8}, & n = 2k+1 \end{cases}$$



(2p)

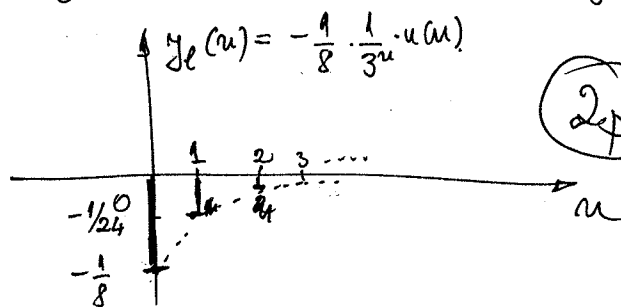
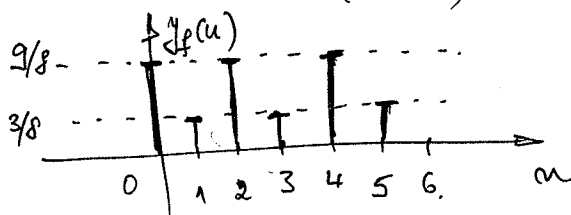
2. $X_2(z) = \frac{1}{1 - z^{-2}}; |z| > 1$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}; |z| > \frac{1}{3}$$

$$Y_2(z) = X_2(z) \cdot H(z) = Y_g(z) + Y_f(z)$$

$$Y_g(z) = -\frac{1}{8} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \Rightarrow y_g(n) = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot u(n)$$

$$Y_f(z) = \frac{9(1 + \frac{z^{-1}}{3})}{8(1 - z^{-2})} \Rightarrow y_f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{f1}(n-2k); y_{f1}(n) = \frac{9}{8}\delta(n) + \frac{3}{8}\delta(n-1)$$



(2p)

3. $y(n) - \frac{1}{3}y(n-1) = x(n)$

$$Y(z) - \frac{1}{3}Y(z) + \frac{z^{-1}}{3}Y(z) \cdot (-1) = X(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{4 - z^{-2}}{3(1 - \frac{z^{-1}}{3})(1 - z^{-2})}$$

$$Y_g(z) = \frac{5}{24} \frac{1}{1 - \frac{z^{-1}}{3}} \Rightarrow y_g(n) = \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{3^n} u(n)$$

$$Y_f(z) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3 + z^{-1}}{1 - z^{-2}} \Rightarrow y_f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{f1}(n-2k); y_{f1}(n) = \frac{9}{8}\delta(n) + \frac{3}{8}\delta(n-1)$$

(2,5p)

Rezolvare problema 3

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n \cdot \cos \omega_0 n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \frac{1}{1-|a|} < \infty \text{ pentru } |a| < 1.$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \{u(n) \cdot a^n \cdot \cos \omega_0 n\} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \{u(n) \cdot (ae^{j\omega_0})^n + u(n) \cdot (ae^{-j\omega_0})^n\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1 - a \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2a \cos \omega_0 z^{-1} + a^2 z^{-2}} ; |z| > |a|$$

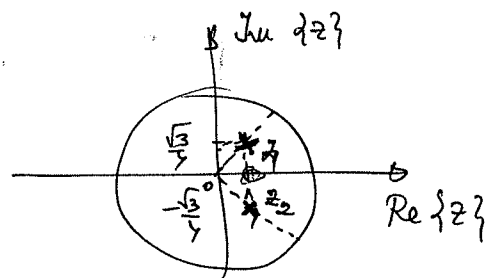
Polii: $z_{1,2} = ae^{\pm j\omega_0}$;

$$a = \frac{1}{2}, \omega_0 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1}{2} e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$$

$$z_1 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} + j \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} - j \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{4} + j \frac{\sqrt{3}}{4} \\ z_2 = \frac{1}{4} - j \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$



Ecuația cu diferențe finite:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - a \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2a \cos \omega_0 z^{-1} + a^2 z^{-2}} \Rightarrow y(n) - 2a \cos \omega_0 y(n-1) + a^2 y(n-2) = x(n) - a \cos \omega_0 x(n-1)$$

$$y(n) - 2a \cos \omega_0 y(n-1) + a^2 y(n-2) = x(n) - a \cos \omega_0 x(n-1)$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{1}{2}; \omega_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) + \frac{1}{4} y(n-2) = x(n) - \frac{1}{4} x(n-1)$$

(2p)

$$b) H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} ; X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} ; |z| > \frac{1}{4} \Rightarrow Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{z^{-1}}{2} + \frac{z^{-2}}{4}}$$

$$\text{Se găsește: } \sum_{n=0}^{\infty} \{e^{-2n} \cdot \sin \rho_0 n \cdot u(n)\} = \frac{e^{-2} \cdot \sin \rho_0 \cdot z^{-1}}{1 - 2z^{-1} e^{-2} \cos \rho_0 + e^{-2} z^{-2}}$$

va rezulta:

$$y(n) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sin \frac{\pi}{3} (n+1) \cdot u(n+1)$$

(1,5p)