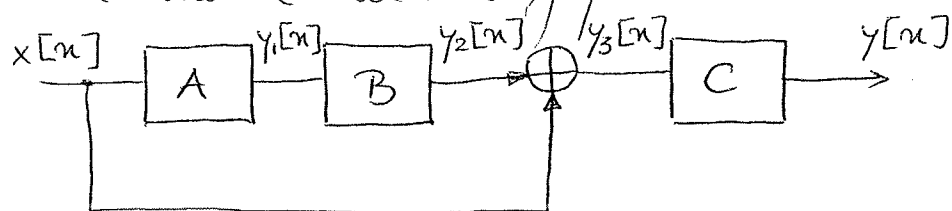


2007?

Problema 1 (Universitatea Tehnică Cluj)

Se consideră un sistem discret, liniar și invariant în timp, având schema bloc din figură.

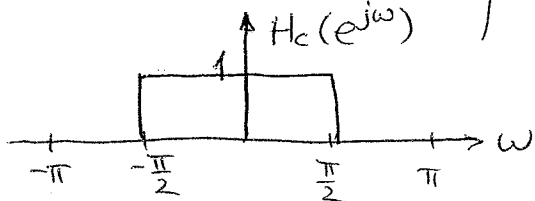


Despre sistemul A se cunosc următoarele:

- 1° Dacă $x[n] = 1, \forall n$, atunci $y_1[n] = -2, \forall n$
- 2° Dacă $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$, atunci $y_1[n] = 2\delta[n] - \alpha(-2)^{1-n} u[n], \alpha \in \mathbb{R}$

Sistemul B are funcția pondere $h_B[n] = (\frac{1}{3})^n u[n-1]$

Sistemul C este descris prin funcția de transfer din figură.



Se cer:

- a) Să se determine constanta α și $h_A[n]$
- b) Să se determine funcția de transfer a întregului sistem și să se reprezinte grafic caracteristicile de frecvență, notând pe axele de coordonate valorile semnificative.
- c) Să se determine funcția pondere a întregului sistem.
- d) Să se determine răspunsul $y[n]$ al sistemului la excitația

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 \sin\left(\frac{(2k+1)n\pi}{4} - \frac{5\pi}{8}\right)$$

Problema 2 (Universitatea Politehnica București)

Se dau semnalele :

$$x_1(t) = \frac{\sin 2t}{t} \quad x_2(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$$

- a) Să se calculeze & să se reprezinte grafic $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$
- b) Să se găsească $\mathcal{F}\{x_1(t)/x_2(t)\} = X_3(\omega)$ și să se reprezinte grafic spectrul de amplitudini asociat lui $X_4(\omega)$.
- c) Să se calculeze energiile W_1, W_2, W_3 disipate de semnalele $x_1(t), x_2(t)$ și respectiv $y(t)$ pe o rezistență de 1Ω .
- d) Să se găsească valorile frecvenței de esanșonare a semnalului:

$$z(t) = 2 \frac{\sin \omega_m t}{\pi t} \cos \omega_1 t, \quad \omega_m = 4\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}, \quad \omega_1 = 16\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

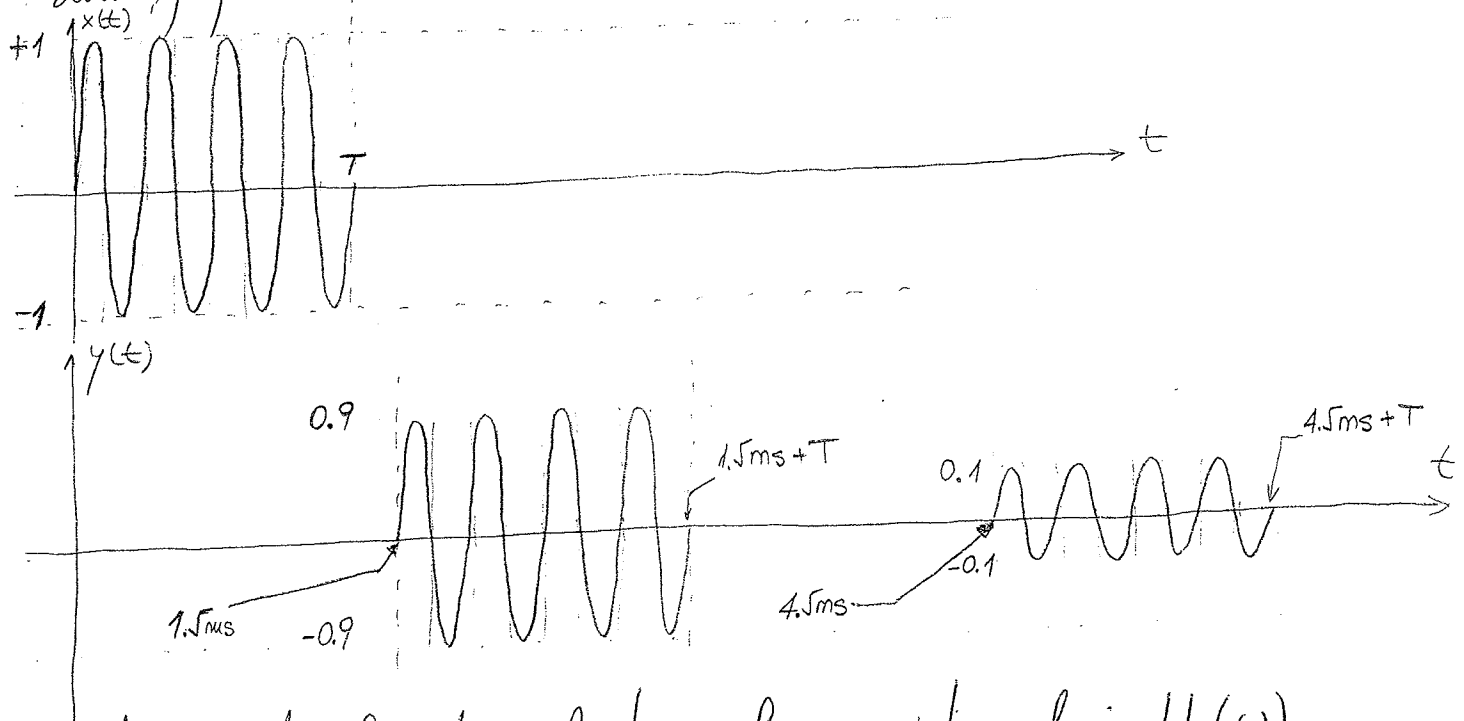
pentru care $z(t)$ mai poate fi refăcut din esanșoanele sale

e) Să se calculeze $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) dt$.

Problema 3 (Universitatea Politehnica Timișoara)

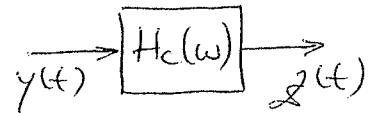
Un sistem liniar răspunde la semnalul $x(t)$ cu semnalul $y(t) = ax(t - t_0) + bx(t - t_1)$

a) Să se determine constantele a, b, t_0, t_1 pentru cazul particular din figură:



b) Determinați funcția de transfer a sistemului, $H_s(\omega)$

c) Pentru a asigura refăcerea semnalului, se intercalează un sistem de corecție, ca în figură, astfel încât la ieșire să apară semnalul $z(t) = x(t - t_0)$. Determinați răspunsul în frecvență $H_c(\omega)$ al sistemului de corecție, în funcție de $H_s(\omega)$.



d) Considerând formula de aproximare de ordinul 2, $\frac{1}{1+u} \approx 1 - u + u^2$ (pe care vă rugăm să o demonstrați), valabilă pentru $|u| \ll 1$, arătați că $H_c(\omega)$ se poate aproxima prin

$$H_c(\omega) \approx |a_0 + a_1 e^{-j\omega\tau} + a_2 e^{-2j\omega\tau}|, \quad \tau = t_1 - t_0 \text{ și determinați } a_0, a_1, a_2.$$

e) Având în vedere formula aproximativă pentru $H_c(\omega)$, scrieți ecuația de legătură între $y(t)$ și $z(t)$.

f) Dați o implementare a sistemului de corecție, utilizând blocați de întârziere cu τ , sumatoare, amplificatoare și/sau atenuatoare.

REZOLVARE PROBLEMA 1

(a) Din $2^\circ \Rightarrow$ semnale cauzale $\Rightarrow$ aplicăm Transformata Z:

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

(0,25p)

$$y_1[n] = 2\delta[n] + 2\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Rightarrow Y_1(z) = 2 + \frac{2\alpha}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

(0,25p)

$$H_A(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)} = 2(1+\alpha) + z^{-1}$$

(0,25p)

$$\Rightarrow h_A[n] = 2(1+\alpha)\delta[n] + \delta[n-1]$$

(0,25p)

$$\text{Din } 1^\circ \Rightarrow 1 * h_A[n] = -2 \Rightarrow 2(1+\alpha) + 1 = -2 \Rightarrow \alpha = -2,5$$

(0,5p)

$$\Rightarrow h_A[n] = -3\delta[n] + \delta[n-1]$$

(b) Fie $h_{AB}[n] = h_A[n] * h_B[n]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h_{AB}[n] &= -3h_B[n] + h_B[n-1] = -3\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1] + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-2] = \\ &= -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \delta[n-1] = -\left(\frac{1}{3}\right)^0 \delta[n-1] = -\delta[n-1] \end{aligned}$$

(1p)

La ieșirea sumatorului:

$$y_3[n] = x[n] + x[n] * h_{AB}[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$\Rightarrow Y_3(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})(1 - e^{-j\omega}) \Rightarrow \frac{Y_3(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1 - e^{-j\omega}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j\omega}) \cdot H_C(e^{j\omega})$$

(0,5p)

$$H_C(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad \text{— se repetă cu } 2\pi$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 - e^{-j\omega}, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad \text{— se rep. cu } 2\pi$$

$$1 - e^{-j\omega} = e^{-j\frac{\omega}{2}} (e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \cdot 2j \sin \frac{\omega}{2} = 2 \sin \frac{\omega}{2} \cdot e^{-j\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2 \sin \frac{\omega}{2} \cdot e^{-j\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2}}, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad \text{— se repetă cu } 2\pi$$

(1p)

Caracteristica amplificării:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 2 \left| \sin \frac{\omega}{2} \right|, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad \text{— se rep. cu } 2\pi$$

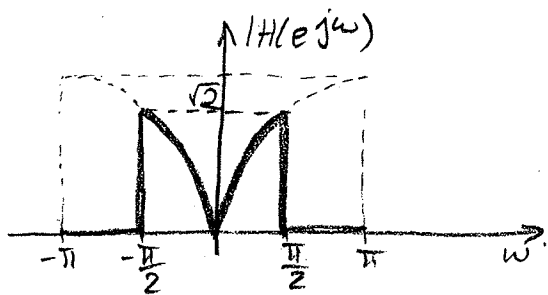
Caracteristica de fazajului:

$$\arg\{H(e^{j\omega})\} = \arg\left\{\sin \frac{\omega}{2}\right\} - \frac{\omega - \pi}{2}$$

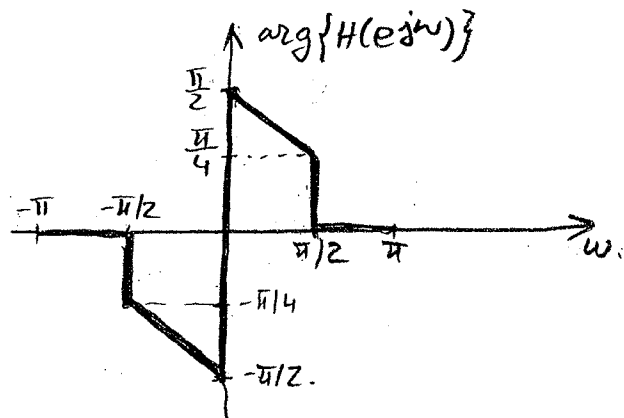
VK

REZOLVARE PROBLEMA 1 (continuare)

$$\arg\left\{\sin\frac{\omega}{2}\right\} = \begin{cases} \pm\pi, & \omega \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 0, & \omega \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \Rightarrow \arg\{H(e^{j\omega})\} = \begin{cases} -\frac{\omega+\pi}{2}, & \omega \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ -\frac{\omega-\pi}{2}, & \omega \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

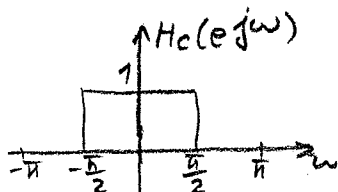


(1p)



(1p)

(c) Dacă $x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n] = (\delta[n] - \delta[n-1]) * h_c[n] = h_c[n] - h_c[n-1]$



$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{H_c(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \cdot \text{Sa}\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (1p)$$

Rezultă $h[n] = \frac{1}{2} \left[\text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \text{Sa}\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) \right]$

(0,5p)

(d) $x[n] = \sum_{k=0}^3 \sin\left[\frac{(2k+1)n\pi}{4} - \frac{5\pi}{8}\right] \Rightarrow y[n] = \sum_k \gamma_k \cdot \sin\left[\frac{(2k+1)n\pi}{4} + \varphi_k\right],$

unde $\gamma_k = |H(e^{j\omega_k})|$; $\varphi_k = -\frac{5\pi}{8} + \arg\{H(e^{j\omega_k})\}$; $\omega_k = \frac{(2k+1)\pi}{4}$ (0,25p)

-pt. $\omega_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} |H(e^{j\omega_0})| = 2 \sin \frac{\pi}{8} \\ \arg\{H(e^{j\omega_0})\} = \frac{3\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (0,5p)$

-pt. $\omega_1 = \frac{3\pi}{4}, \omega_2 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow |H(e^{j\omega_{1,2}})| = 0 \quad (0,25p)$

-pt. $\omega_3 = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} |H(e^{j\omega_3})| = 2 \sin \frac{\pi}{8} \\ \arg\{H(e^{j\omega_3})\} = -\frac{3\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin\left(\frac{7n\pi}{4} - \pi\right) \quad (0,5p)$

Rezultă:

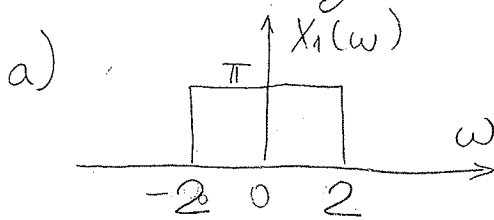
$$y[n] = 2 \sin \frac{\pi}{8} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7n\pi}{4} - \pi\right) \right]$$

Oficiu

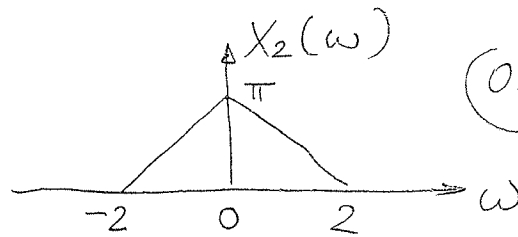
(1p)

Problema 2 - rezolvare

1pof



0.5p

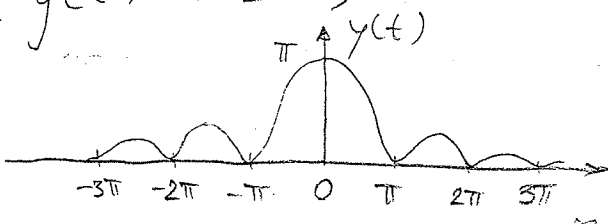


0.5p

$$Y(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega) = \pi X_2(\omega)$$

0.5p

$$y(t) = \pi x_2(t)$$



0.5p

b) $\mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(\lambda)X_1(\omega-\lambda)d\lambda = X_3(\omega)$

0.5p

1) $\omega+2 < -2 \Rightarrow \omega < -4 \Rightarrow X_3(\omega) = 0$

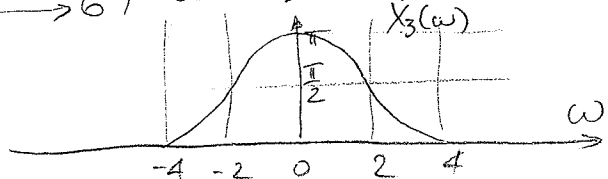
2) $-2 \leq \omega+2 \leq 0 \Rightarrow -4 \leq \omega \leq -2, X_3(\omega) = \frac{\pi}{8}(\omega+4)^2$

3) $0 \leq \omega+2 \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \omega \leq 0, X_3(\omega) = \frac{\pi}{4}(4 - \frac{\omega^2}{2})$

4) $-2 \leq \omega-2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \omega \leq 2, X_3(\omega) = \frac{\pi}{4}(4 - \frac{\omega^2}{2})$

5) $0 \leq \omega-2 \leq 2 \Rightarrow 2 \leq \omega \leq 4, X_3(\omega) = \frac{\pi}{8}(\omega-4)^2$

6) $\omega-2 \geq 2 \Rightarrow \omega \geq 4 \Rightarrow X_3(\omega) = 0$



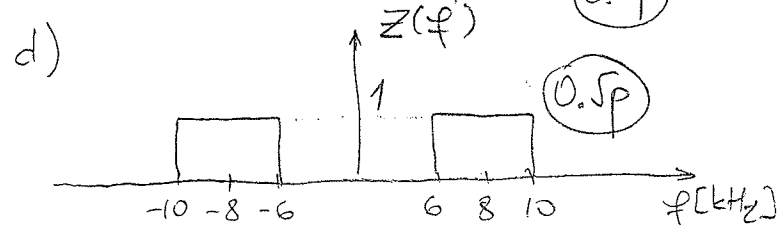
0.5p

c) $W_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 |X_1(\omega)|^2 d\omega = 2\pi [J], W_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 |X_2(\omega)|^2 d\omega = \frac{2\pi}{9} [J]$

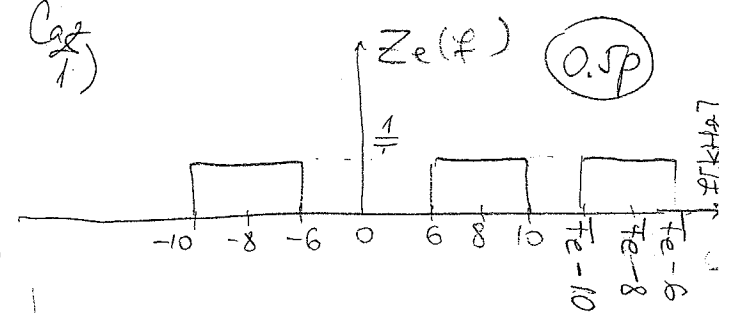
0.5p

$W_3 = \pi^2 W_2 = \frac{2\pi^3}{9} [J]$

0.5p



0.5p



0.5p

e) $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \int_{-2}^2 X_2(\omega)d\omega = \pi$$

1p

Ca2) $f_e - 10 \geq 10 \Rightarrow f_e \geq 20 \text{ kHz}$

2) $f_e - 10 \geq 0, f_e - 6 \leq 6$

$\Rightarrow f_e \in [10, 12] \text{ [kHz]}$

$f_e \in [10, 12] \cup [20, \infty] \text{ kHz}$

1p

Problema 3 - rezolvare

Start

a) Rezultă imediat $a=0.9, b=0.1, t_0=1.5\text{ms}, t_1=4.5\text{ms}$...

b) $Y(\omega) = ae^{-j\omega t_0} X(\omega) + be^{-j\omega t_1} X(\omega)$ și deci ...

$H_s(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = ae^{-j\omega t_0} + be^{-j\omega t_1} = 0.9e^{-j\omega 1.5 \cdot 10^{-3}} + 0.1e^{-j\omega 4.5 \cdot 10^{-3}}$...

c) $Z(\omega) = H_c(\omega) Y(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$...

$\Rightarrow H_c(\omega) = \frac{Z(\omega)}{Y(\omega)} = \frac{e^{-j\omega t_0}}{Y(\omega)/X(\omega)} = \frac{e^{-j\omega t_0}}{H_s(\omega)}$...

$H_c(\omega) = \frac{e^{-j\omega t_0}}{ae^{-j\omega t_0} + be^{-j\omega t_1}} = \frac{e^{-j\omega 1.5 \cdot 10^{-3}}}{0.9e^{-j\omega 1.5 \cdot 10^{-3}} + 0.1e^{-j\omega 4.5 \cdot 10^{-3}}}$...

d) $f(u) = \frac{1}{1+u} \approx f(0) + \frac{u}{1!} f'(0) + \frac{u^2}{2!} f''(0)$, dacă $|u| \ll 1$...

atunci u^3, u^4 sunt neglijabile

$f(0)=1, f'(0)=-1, f''(0)=2$

$\Rightarrow \frac{1}{1+u} \approx 1 - u + u^2$...

$H_c(\omega) = \frac{1}{a + be^{j\omega(t_1-t_0)}} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + \frac{b}{a} e^{-j\omega\tau}}$...

Deci $|\frac{b}{a} e^{-j\omega\tau}| = |\frac{b}{a}| \ll 1$

$\Rightarrow H_c(\omega) \approx \frac{1}{a} (1 - \frac{b}{a} e^{-j\omega\tau} + \frac{b^2}{a^2} e^{-2j\omega\tau}) = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} e^{-j\omega\tau} + \frac{b^2}{a^3} e^{-2j\omega\tau}$...

$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{a}, a_1 = -\frac{b}{a^2}, a_2 = \frac{b^2}{a^3}$, adică $a_0=1.111, a_1=-0.123, a_2=0.014$...
 $\tau = 3 \cdot 10^{-3} \text{s}$

e) $Z(\omega) = a_0 Y(\omega) + a_1 e^{-j\omega\tau} Y(\omega) + a_2 e^{-2j\omega\tau} Y(\omega)$...

$z(t) = a_0 y(t) + a_1 y(t-\tau) + a_2 y(t-2\tau)$...

$z(t) = 1.111 y(t) - 0.123 y(t-\tau) + 0.014 y(t-2\tau)$...

