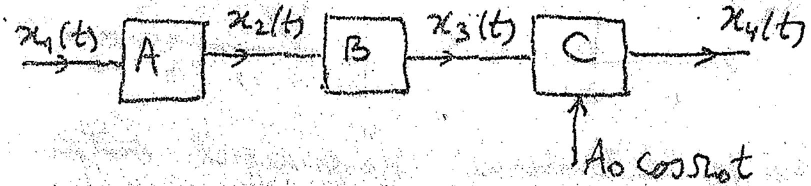
CONCURSUL TUDOR TĂNĂSESCU - SECȚIUNEA S.C.S.

Faza finală - Mai 2003

Problema 1

Se consideră schema bloc din figură:



Blocul A reprezintă un sistem neliniar caracterizat prin relația intrare-ieșire $x_2(t) = a x_1(t) + b x_1^2(t)$, cu $a, b \in R_+$, blocul B este un sistem analogic liniar și invariant în timp, având funcția pondere $h(t) = \frac{\sin 3\omega_1 t}{\pi t} \cdot \cos 10\omega_1 t$, iar blocul C este un modulator de fază de bandă îngustă cu frecvența purtătoare $F_0 = 100 f_1$ $\left(\max |k_p x_3(t)| << \frac{\pi}{2} \right)$.

Considerând semnalul de intrare

$x_1(t) = \cos 4\omega_1 t + \cos 6\omega_1 t$ [V] se cere:

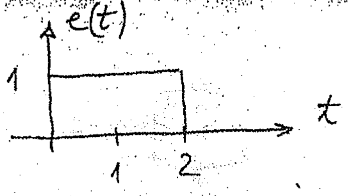
a) Să se determine constantele a și b astfel încât armonica cu frecvența $4\omega_1$ să aibă amplitudinea 4V, iar valoarea efectivă a semnalului $x_2(t)$ să fie 5V. Să se reprezinte grafic spectrul de amplitudini al semnalului $x_2(t)$, marcând pe axele de coordonate valorile semnificative.

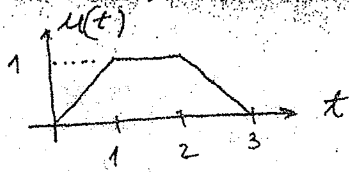
b) Să se determine și să se reprezinte grafic semnalul $x_3(t)$.

c) Să se determine și să se reprezinte grafic spectrele de amplitudini și de faze ale semnalului $x_4(t)$.

Problema 2

Se consideră un sistem liniar căruia se aplică semnalul $e(t)$. Integrala răspunsului sistemului la $e(t)$ este $u(t)$.



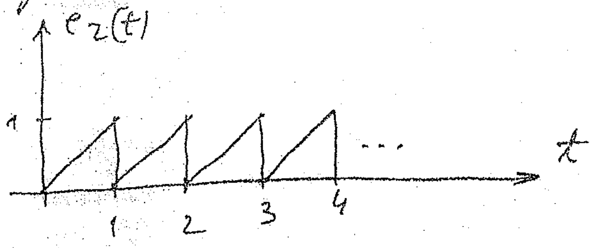


a. Să se determine răspunsul sistemului la semnalul $e_1(t)$

$$e_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ kt & 0 < t < t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$$

și să se afle valorile extreme în funcție de t_0.

b. Să se determine integrala și derivata răspunsului sistemului la semnalul semiperiodic $e_2(t)$



Problema 3

a) Să se calculeze

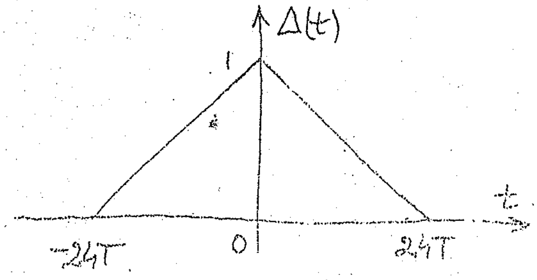
$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - n8T)$$

unde $x(t)$ are transformata Fourier

$$X(\omega) = \begin{cases} A\cdot(1+\cos\omega T) & \text{pentru } |\omega| \le \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

b) Să se desceneze transformata Fourier a semnalului:

$$y(t) = x_1(t)\cdot \Delta(t)$$

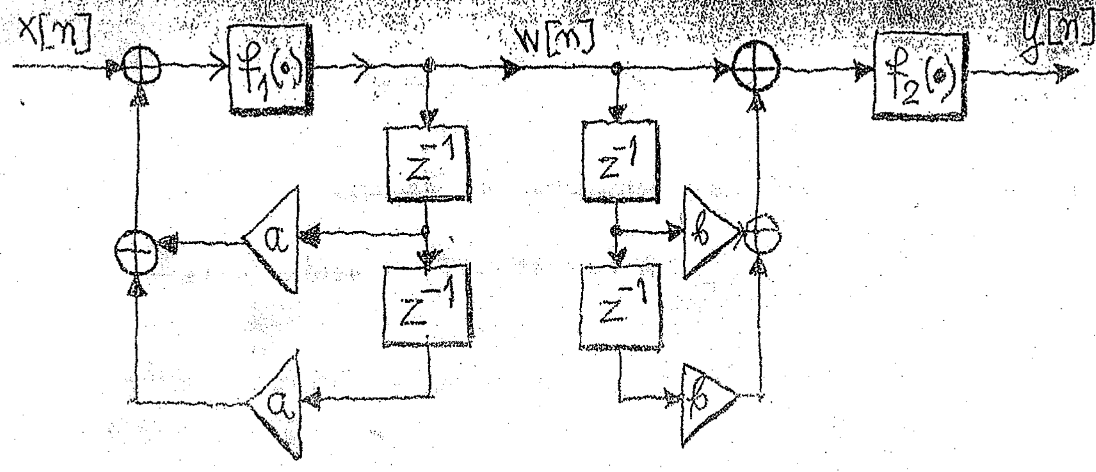


c) Să se calculeze

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - n\,12T)$$

Problema 4

Se dă Sistemul Numeric (SN) din figură:

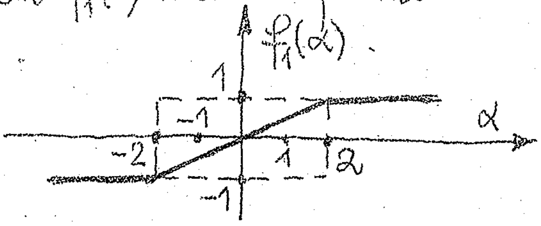


a) Dacă $f_1(\cdot)$ și $f_2(\cdot)$ sunt funcții liniare de tipul:

$$f_1(\alpha) = m_1 \cdot \alpha \quad \text{și} \quad f_2(\alpha) = m_2 \cdot \alpha$$

ce condiții trebuie să îndeplinească m_1, m_2 și constantele „a" și „b" ale SN astfel încât: $y[n] = x[n]$;

b) Dacă $f_1(\cdot)$ este de forma:



determinați forma funcției $f_2(\cdot)$ de același tip și discutați alegerea constantelor „a" și „b" ale SN (inițial relaxat) astfel încât:

$$y[n] = x[n] \quad \text{cu} \quad |x[n]| \leq 2$$

c) În condițiile de la punctul b), de exemplu pentru $a = -\frac{1}{2}$, verificați egalitatea $y[n] = x[n]$ pentru $x[n] = 2 \cdot u[n]$.

Problema 1 - Rezolvare Of. (1p)

a) $x_2(t) = a\,x_1(t) + b\,x_1^2(t) = a(\cos 4\omega_1 t + \cos 6\omega_1 t) +$

$+ b(\cos 4\omega_1 t + \cos 6\omega_1 t)^2 = a\cos 4\omega_1 t + a\cos 6\omega_1 t +$

$+ b\cos^2 4\omega_1 t + b\cos^2 6\omega_1 t + 2b\cos 4\omega_1 t \cos 6\omega_1 t =$

$= a\cos 4\omega_1 t + a\cos 6\omega_1 t + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\cos 8\omega_1 t + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\cos 12\omega_1 t +$

$+ b\cos 10\omega_1 t + b\cos 2\omega_1 t =$

$= b + b\cos 2\omega_1 t + a\cos 4\omega_1 t + a\cos 6\omega_1 t + \frac{b}{2}\cos 8\omega_1 t +$

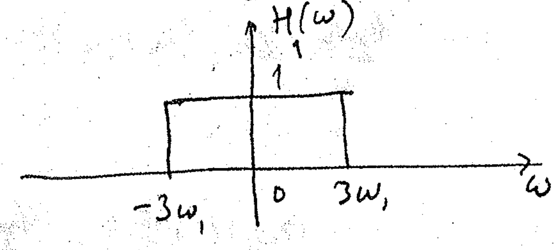
$+ b\cos 10\omega_1 t + \frac{b}{2}\cos 12\omega_1 t \Rightarrow a = 4V$ (1,25p)

$X_{2ef} = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{8} + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{8}} = 5 \Rightarrow$ (0,5p)

$\sqrt{\frac{9b^2}{4} + a^2} = 5 \rightarrow b = 2V$ (0,25p)

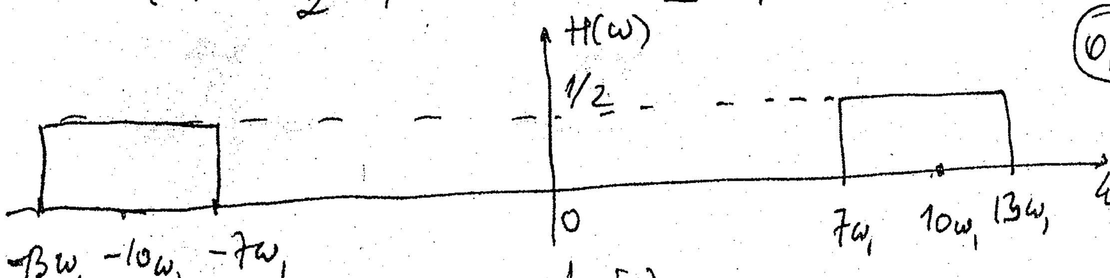
$x_2(t) = 2 + 2\cos 2\omega_1 t + 4\cos 4\omega_1 t + 4\cos 6\omega_1 t + \cos 8\omega_1 t + 2\cos 10\omega_1 t + \cos 12\omega_1 t$

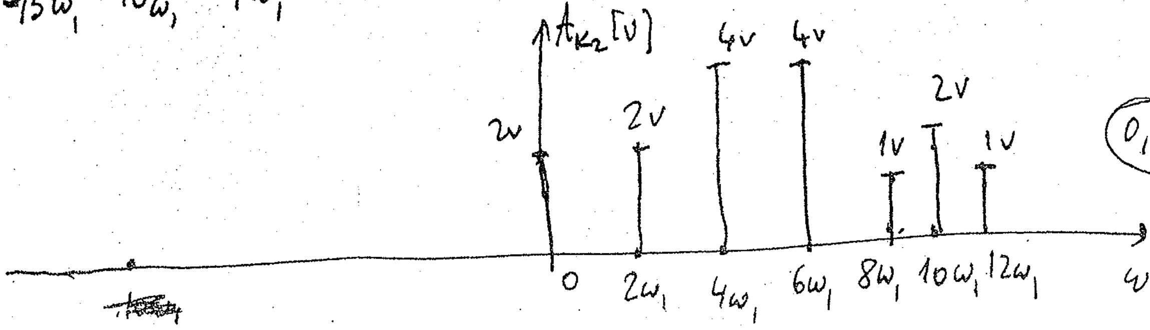
b) $h_1(t) = \frac{\sin 3\omega_1 t}{\pi t}$



(0,5p)

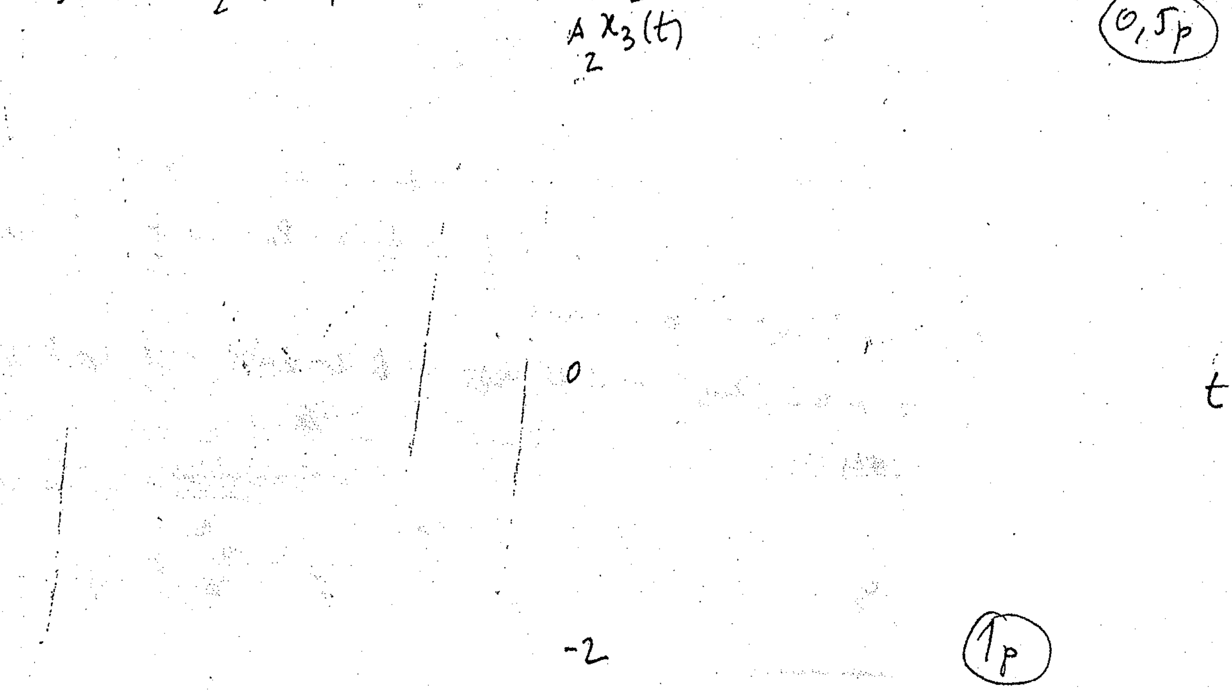
$H(\omega) = \frac{1}{2} H_1(\omega - 10\omega_1) + \frac{1}{2} H_1(\omega + 10\omega_1)$ (0,5p)





(0,5p)

$$x_3(t) = \frac{1}{2}\cos 8\omega_1 t + \cos 10\omega_1 t + \frac{1}{2}\cos 12\omega_1 t = (1+\cos 2\omega_1 t)\cos 10\omega_1 t$$ (0,5p)



(1p)

c) $x_4(t) = A_0 \cos \Omega_0 t - k_p A_0 x_3(t) \sin \Omega_0 t = A_0 \cos \Omega_0 t -$

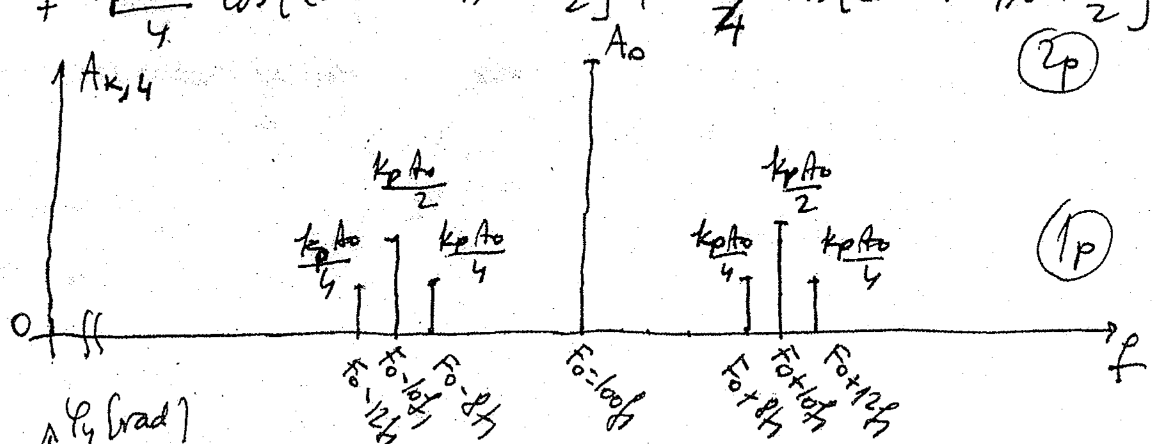
$- k_p A_0 \left(\frac{1}{2}\cos 8\omega_1 t + \cos 10\omega_1 t + \frac{1}{2}\cos 12\omega_1 t\right)\sin \Omega_0 t =$

$= A_0 \cos \Omega_0 t + \frac{k_p A_0}{4}\cos\left[(\Omega_0 + 8\omega_1)t + \frac{\pi}{2}\right] + \frac{k_p A_0}{2}\cos\left[(\Omega_0 - 8\omega_1) + \frac{\pi}{2}\right] +$

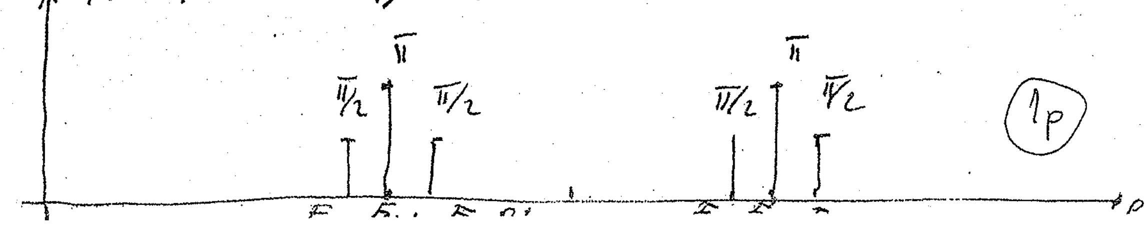
$+ \frac{k_p A_0}{2}\cos\left[(\Omega_0 + 10\omega_1)t + \pi\right] + \frac{k_p A_0}{2}\cos\left[(\Omega_0 - 10\omega_1)t + \pi\right] +$

$+ \frac{k_p A_0}{4}\cos\left[(\Omega_0 + 12\omega_1)t + \frac{\pi}{2}\right] + \frac{k_p A_0}{4}\cos\left[(\Omega_0 - 12\omega_1)t + \frac{\pi}{2}\right]$

(2p)



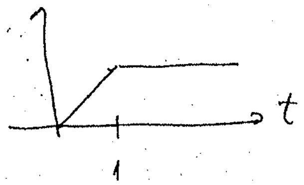
(1p)

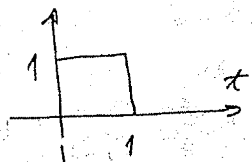


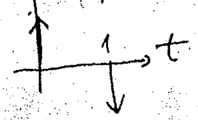
(1p)

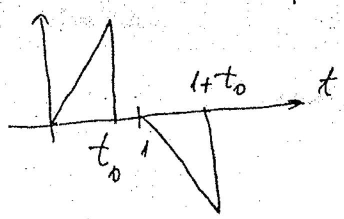
1 of Rezolvare - Problema 2

1 Semnalul $e(t)$ este de forma $e(t) = \sigma(t) - \sigma(t-2)$

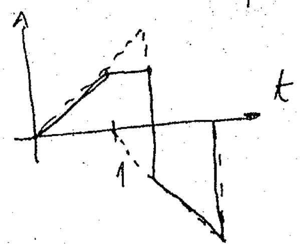
1 Integrala răspunsului la $\sigma(t)$ este 

1 Răspunsul la $\sigma(t)$ este 

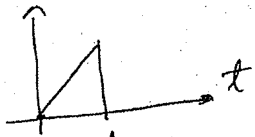
1 Funcția pondere este  $h(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$

1 Pentru $t_0 < 1$, răspunsul sistemului la $e_1(t)$ este 

valorile extreme fiind $\pm k t_0$

1 Pentru $t_0 > 1$ răspunsul sistemului este 

Valorile extreme sunt k și $-k t_0$

1 Răspunsul sistemului la semnalul semiperiodic este 

1 astfel încât integrala este

$$\int_0^t y(t)\,dt = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{2}t & 0<t<1 \\ \frac{1}{2} & t \geq 1 \end{cases}$$

1 derivata este

$$y'(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0<t<1 \\ -\delta(t-1) & t=1 \\ 0 & t>1 \end{cases}$$

Rezolvare problema 3

START (1p)

a) (variantă)

$$X_1(\omega) = X(\omega)\cdot\frac{2\pi}{8}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{4T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(n\frac{\pi}{4T}\right)\delta\left(\omega - n\frac{\pi}{4T}\right) =$$

$$= \frac{\pi A}{4T}\sum_{n=-3}^{3}\left(1+\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\delta\left(\omega - n\frac{\pi}{4T}\right)$$ [vezi Figura 1 a)]

(2p)

$$x_1(t) = \frac{A}{4T}\left[1 + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4T}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2T}\right) + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4T}t\right)\right]$$

(1p)

b) $$\Delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Delta(\omega) = 24T\cdot \mathrm{sinc}^2(12T\omega)$$ [vezi figura 1b)] (1p)

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * \Delta(\omega) =$$

$$= 3A\sum_{n=-3}^{3}\left(1+\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{sinc}^2\left[12T\left(\omega - n\frac{\pi}{4T}\right)\right]$$ (1p)

desen transformata Fourier a lui $Y(\omega)$ – figura 2 (1p)

c) $$Z(\omega) = Y(\omega)\,\frac{2\pi}{12T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{12T}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{6T}\left[6A\delta(\omega) + 3A\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{6T}\right) + 3A\,\delta\left(\omega + \frac{3\pi}{6T}\right)\right]$$ (2p)

$$z(t) = \frac{A}{2T}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2T}t\right)\right]$$ (1p)

Rezolvare problema 3 (continuare)

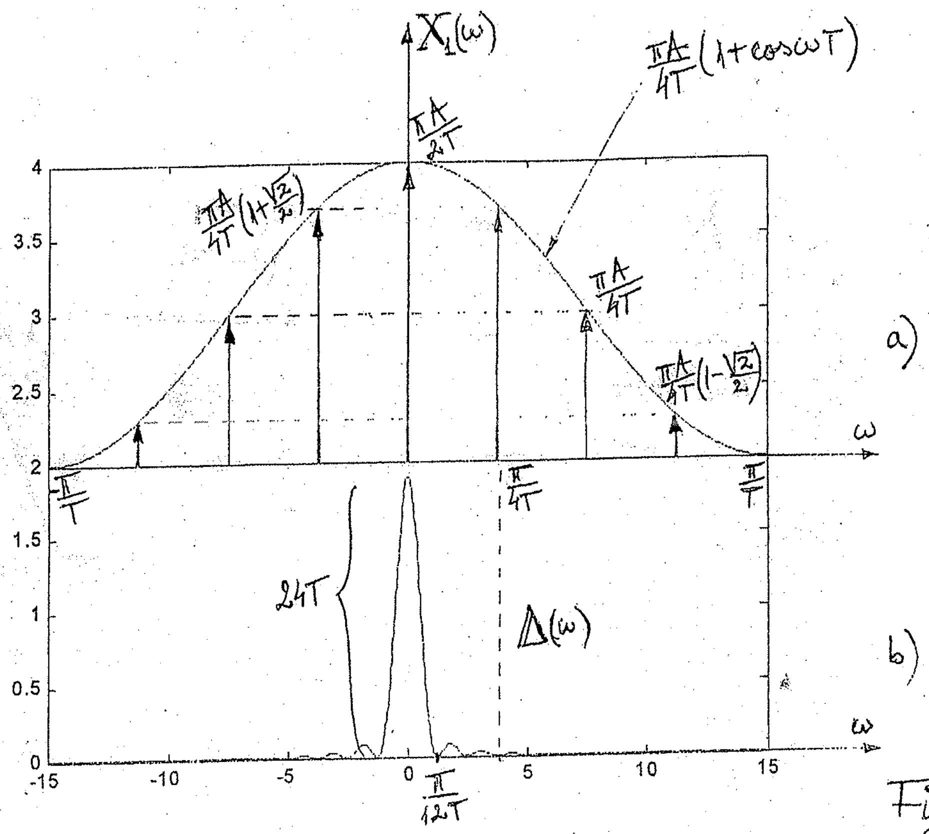


Figura 1

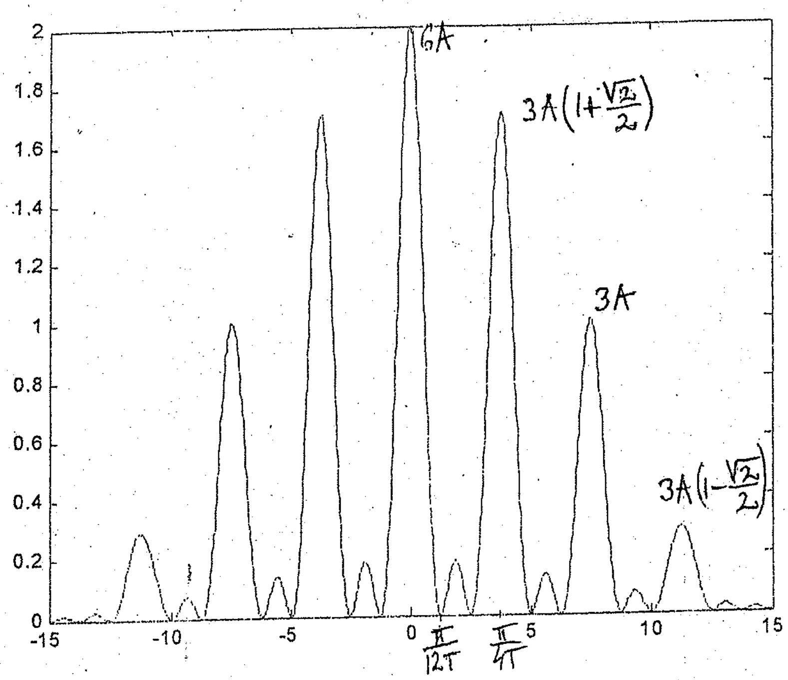
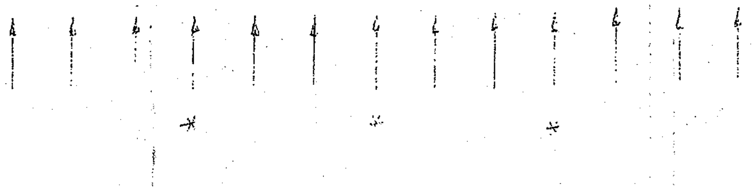


Figura 2

„momentele" de eșantionare în frecvență



REZOLVARE Problema 4 — (1p)

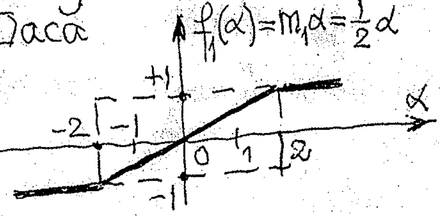
a) $w[n]=f_1(x[n]+a\,w[n-1]+a\,w[n-2])=m_1x[n]+am_1w[n-1]+am_1w[n-2]$ — (1p)

$y[n]=f_2(w[n]+b\,w[n-1]+b\,w[n-2])=m_2w[n]+bm_2w[n-1]+bm_2w[n-2]=$ — (1p)

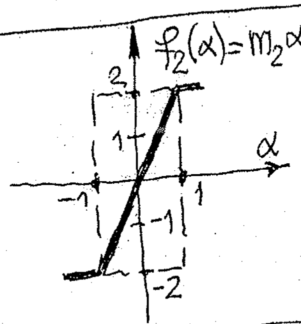
$=m_1m_2x[n]+am_1m_2w[n-1]+am_1m_2w[n-2]+bm_2w[n-1]+bm_2w[n-2]$ — (0,5p)

Pentru ca $y[n]=x[n]$ trebuie: $\begin{cases} m_1m_2=1 \\ a+bm_2=0 \end{cases}$ — (0,5p)

b) Dacă $f_1(\alpha)=m_1\alpha=\frac{1}{2}\alpha$



atunci, de ex: $f_2(\alpha)=m_2\alpha=2\alpha$



— (1,5p)

Discuţie: pentru $m_2=2 \Rightarrow (a+2b)=0 \Rightarrow \{a=-2b\} \Rightarrow \begin{cases} \text{pt } a>0 \Rightarrow b<0 \\ \text{pt } a<0 \Rightarrow b>0 \end{cases}$

- În regim liniar (pct. a) alegerea unei valori pozitive/negative pt. „a" este indiferentă
- În cazul liniar pe porţiuni (vezi $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$), când $|x[n]|=2$, alegerea lui $a<0$ evită saturaţia lui $w[n]$;
- În general, când $a\{w[n-1]+w[n-2]\}<0$ impune alegerea lui $a<0$ dacă $\{w[n-1]+w[n-2]\}>0$. — (2p)

— (0,5p)

c) $w[n]=f_1\left(x[n]-\frac{1}{2}w[n-1]-\frac{1}{2}w[n-2]\right) \Rightarrow y[n]=f_2\left(w[n]+\frac{1}{4}w[n-1]+\frac{1}{4}w[n-2]\right)$

Pt: $x[n]=2\cdot u[n]$ şi $a=-\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{4}$:

$w[0]=$

$w[1]=f_1(\ldots)=\frac{3}{4}$

$w[2]=f_1(\ldots)=\frac{9}{16}$

$w[3]=f_1(\ldots)=\frac{43}{64}$ (1p) ⇒

$y \ldots f_2\left(\frac{43}{64}+\ldots\right)$ (1p)

Pe când, alegerea lui $a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=-\frac{1}{4}$ conduce la rezultatele: