CONCURSUL PROFESIONA „TUDOR TANĂSESCU"

Faza națională 2002

SECȚIUNEA: Semnale și sisteme

PROBLEMA 1:

La intrarea unui sistem discret, liniar și invariant în timp, având funcția de transfer

$$H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h[n]\} = 1 + 2\sum_{n=1}^{11}\cos(n\omega)$$

se aplică semnalul discret $x(n)$ având transformata Fourier:

$$X(e^{j\omega}) = 1 + 2\sum_{n=1}^{2002}\cos(n\omega)$$

Se cere:

a) Să se reprezinte grafic $H(e^{j\omega})$, marcând pe axele de coordonate valorile semnificative;

b) Să se determine și să se reprezinte grafic răspunsul $y(n)$ al sistemului;

c) Se consideră semnalul

$$z(t) = \left(1 + 2\sum_{n=1}^{11}\cos(n\omega_0 t)\right)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{2002}\cos(n\omega_0 t)\right) [mV]$$

Să se exprime forma armonică a lui $z(t)$ și apoi să se determine puterea debitată pe o rezistență $R = 1\Omega$ de către semnalul $w(t)$ obținut la ieșirea unui FTS ideal cu $f_t = 1991{,}5\, f_0 (\omega_0 = 2\pi f_0)$, având la intrare semnalul $z(t)$.

PROBLEMA 2

Pentru reconstrucția unui semnal din eșantioanele sale se folosește funcția de interpolare $f(t)$, cu proprietatea:

$$f[n] = f(nT)\Big|_{T=1} = \delta[n]$$

Se cere:

a) Să se demonstreze că:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2k\pi) = 1$$

dacă și numai dacă f este o funcție de interpolare;

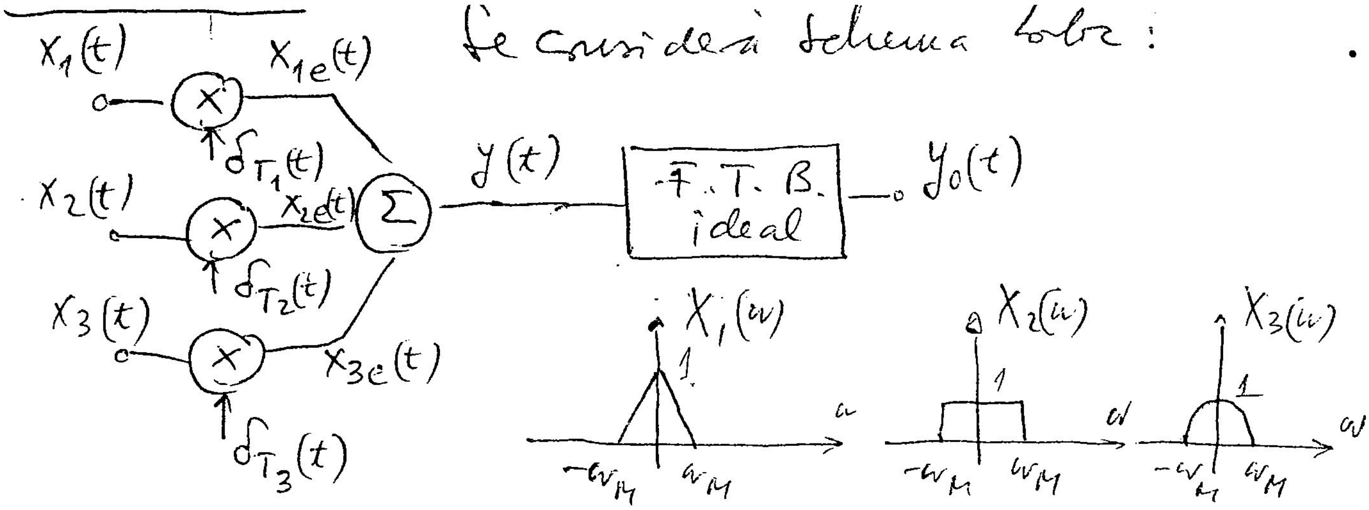
b) Utilizând rezultatul de la punctul a) demonstrați identitatea:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) = 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

204
2~~4~~1

BV208A-Toshiba

Se consideră schema bloc:



Semnalele $x_1(t)$, $x_2(t)$ și $x_3(t)$ sunt de bandă limitată ω_M.

a). Să se reprezinte grafic spectrul semnalului $y(t)$ pentru $F_M = 1KHz$, $F_1 = 7KHz$, $F_2 = 8KHz$, $F_3 = 9KHz$. ($F_k = \frac{1}{T_k}$, $k = 1, 2, 3$) pentru domeniul de frecvențe $|f| \leq 30KHz$

b). Să se determine frecvența centrală minimă și banda de trecere minimă ale filtrului trece bandă ideal pentru care $y_0(t)$ conține informație din semnalele $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

c). Să se discute modurile de detecție ale semnalelor $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ din $y_0(t)$

PROBLEMA 4

Se consideră schema din figura 1 în care blocurile cu funcțiile pondere $h_1[n]$ și $h_2[n]$ sunt sisteme discrete liniare și invariante în timp

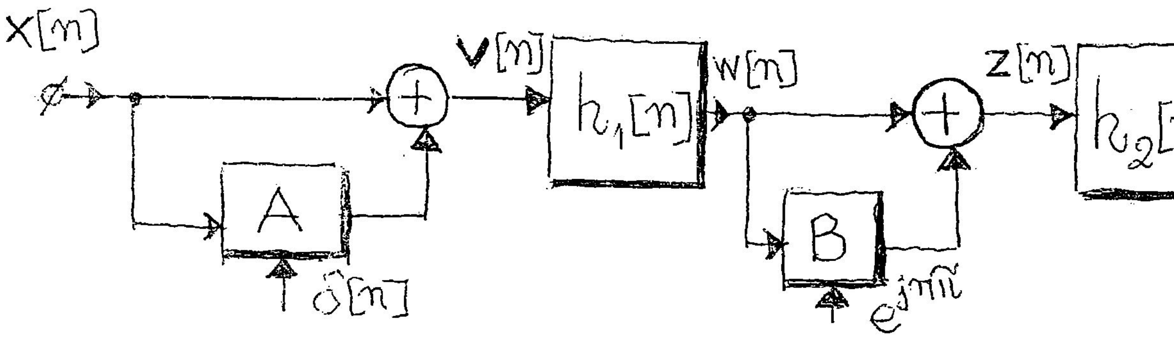
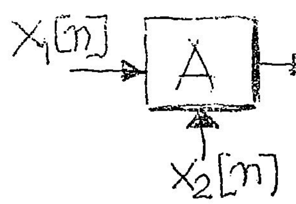


Fig 1

unde: blocul A calculează funcția de intercorelație conform circuitului din figura 2, iar blocul B este un circuit de multiplicare.



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]\cdot x_2[k+n]$$

Fig 2

iar: $\mathcal{Z}\{x[n]\} = \dfrac{z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$; cu $x[n]$ = semnal cauzal

$h_1[n] = a^n \cdot u[n]$; cu $|a|<1$ și $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$

$h_2[n] = u[n] - u[n-3]$

Se cere:

1) Să se determine parametrul „a" din expresia funcției $h_1[n]$ astfel încât semnalul $w[n]$ să ia valori cuprinse între ± 1;

2) Să se determine și să se reprezinte grafic în domeniul timp semnalele $z[n]$ și $y[n]$;

3) Să se calculeze și să se reprezinte grafic spectrul de amplitudini al semnalului $y[n]$

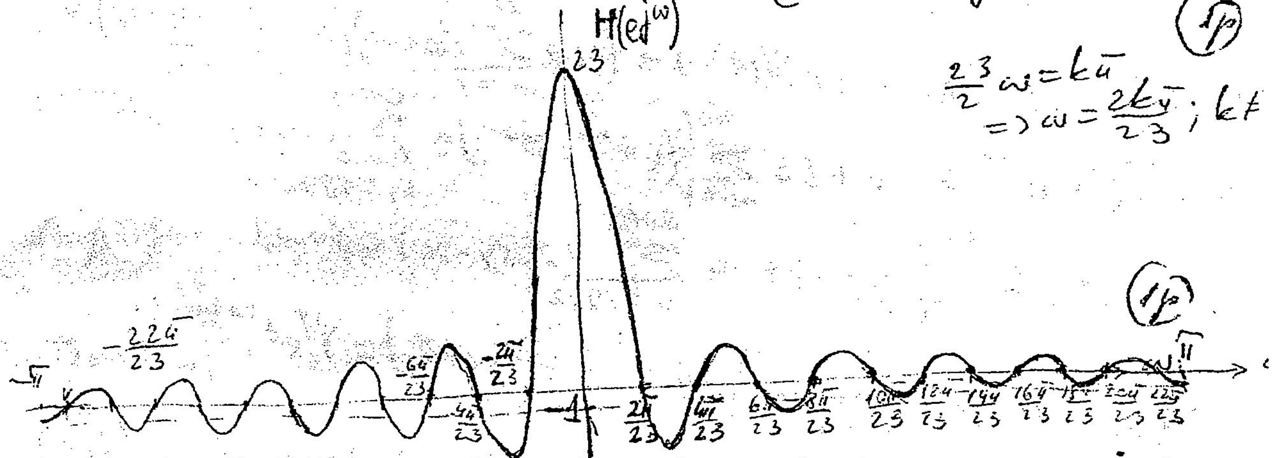
PROBLEMA 1: Rezolvare: 11p

a) $H(e^{j\omega}) = 1 + 2\sum_{n=1}^{11} \cos(n\omega) = \sum_{n=-11}^{11} e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-jk\omega}$

$\Rightarrow h[n] = \begin{cases} 1 & \text{pt. } -11 \le n \le 11 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$ (0,5p)

$H(e^{j\omega}) = e^{j11\omega} \dfrac{1 - e^{-j23\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{j11\omega} \dfrac{e^{-j\frac{23}{2}\omega}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} \dfrac{2j \sin\frac{23}{2}\omega}{2j \sin\frac{1}{2}\omega} = \dfrac{\sin\frac{23}{2}\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}$ (1p)

$\frac{23}{2}\omega = k\pi \Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{23};\ k \neq$

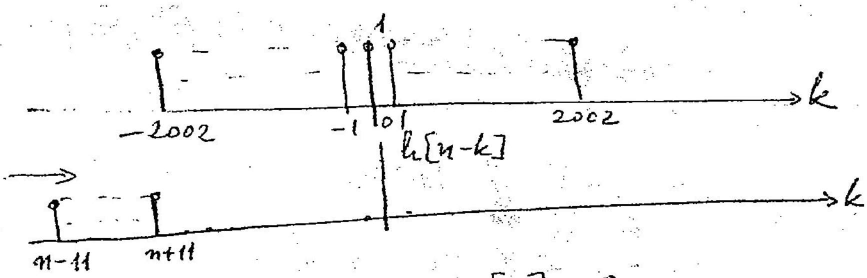


(1p)

b) $X(e^{j\omega}) = 1 + \sum_{n=1}^{2002} \cos(n\omega) = \sum_{n=-2002}^{200} 1 \cdot e^{-jk\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jn\omega}$

$\Rightarrow x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pt. } -2002 \le n \le 2002 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$ (0,5p)

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$



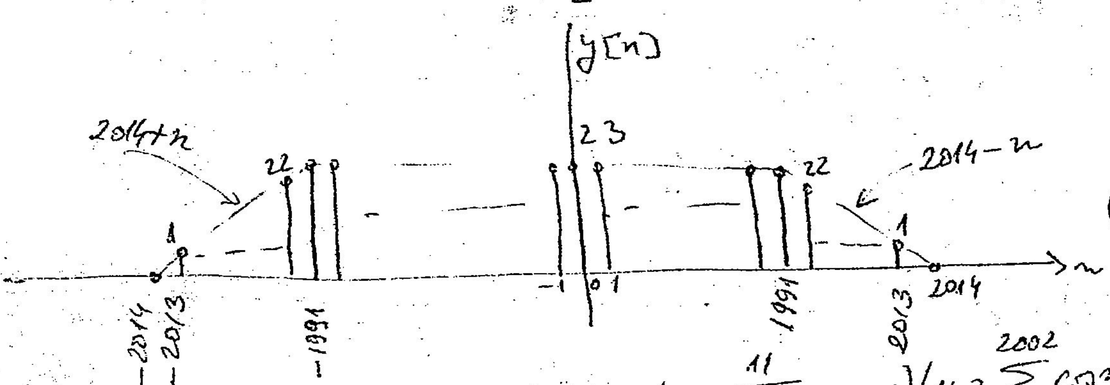
- a) $n+11 < -2002 \Leftrightarrow n < -2013 \Rightarrow \underline{y[n] = 0}$
- b) $\left.\begin{array}{l} n+11 \ge -2002 \\ n-11 < -2002 \end{array}\right\} \Leftrightarrow -2013 \le n < -1991$

  $\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-2002}^{n+11} x[k] \cdot 1 = n+11+2002+1 = \underline{n+2014}$ $(x[k]=1)$

  (1p)
- c) $\left.\begin{array}{l} n+11 \le 2002 \\ n-11 \ge -2002 \end{array}\right\} \Leftrightarrow -1991 \le n \le 1991$

  $\Rightarrow y[n] = \sum_{k=n-11}^{n+11} x[k] \cdot 1 = n+11-n+11+1 = \underline{23}$
- d) $\left.\begin{array}{l} n+11 > 2002 \\ n-11 \le 2002 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 1991 < n \le 2013$

  $y[n] = \sum_{k=n-11}^{2002} x[k]\, 1 = 2002 - n + 11 + 1 = \underline{2014 - n}$
- e) $n-11 > 2002 \Leftrightarrow n > 2013 \Rightarrow \underline{y[n] = 0}$



(1p)

c) $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) = \left(1+2\sum_{n=1}^{11}\cos n\omega\right)\left(1+2\sum_{n=1}^{2002}\cos n\omega\right) =$

$= \sum_n y[n] e^{-jn\omega} = 23 + 23\sum_{n=1}^{1991}\left(e^{jn\omega}+e^{-jn\omega}\right) + \sum_{n=1992}^{2013}(2014-n)\left(e^{jn\omega}+e^{-jn\omega}\right) =$

$= 23 + 46\sum_{n=1}^{1991}\cos(n\omega) + 2\sum_{n=1992}^{2013}(2014-n)\cos(n\omega)$ (1p)

$z(t) = \left(1+2\sum_{n=1}^{11}\cos n\omega_0 t\right)\left(1+2\sum_{n=1}^{2002}\cos n\omega_0 t\right) = Y(e^{j\omega})\Big|_{\omega\to\omega_0 t}$

$\Rightarrow z(t) = 23 + 46\sum_{n=1}^{1991}\cos(n\omega_0 t) + 2\sum_{n=1992}^{2013}(2014-n)\cos(n\omega_0 t)$ (1p)

$w(t) = z(t)\Big|_{n\geq 1992} = 2\sum_{n=1992}^{2013}(2014-n)\cos(n\omega_0 t)$ [mW] (1p)

$\Rightarrow P_w = \sum_{n=1992}^{2013}\frac{A_n^2}{2} = 2\sum_{n=1992}^{2013}(2014-n)^2 \cdot 10^{-6}$ [W]

$= 2\sum_{n=1}^{22} n^2 \cdot 10^{-6} = 2\,\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}\Big|_{n=22} \cdot 10^{-6}$ [W] $=$

$= \frac{2 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 45}{6} \cdot 10^{-3}$ [mW] $= 22 \cdot 23 \cdot 15 \cdot 10^{-3}$ [mW] $=$

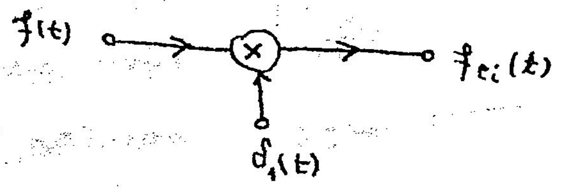
$= 7590 \cdot 10^{-3}$ mW $= 7{,}59$ mW. (1p)

PROBLEMA 2

a) " $\Rightarrow$ "

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega+2k\pi)=1 \Rightarrow f[n]=\delta[n]$$

Fie sistemul de eşantionare ideală cu structura din figură:



Spectrul semnalului eşantionat ideal, $f_{ei}(t)$, este:

$$F_{ei}(\omega)=\frac{1}{1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F\left(\omega-k\frac{2\pi}{1}\right) \overset{l=-k}{=\!=} \sum_{l=-\infty}^{\infty}F(\omega+2l\pi) \overset{\text{ipoteză}}{=\!=} 1$$

0,5p (0,

Spectrul semnalului în timp discret, $f_{ei}[n]$, este legat de spectrul semnalului din a cărui eşantionare a provenit, $f(t)$, prin relaţia:

$$F_{ei}(\Omega)=F_{ei}(\omega)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{1}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\Omega+2k\pi)\overset{(1)}{=}1 \qquad (2)$$

0,5p 0,5p

Calculând transformata Fourier în timp discret inversă, se obţine:

$$f_{ei}[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_{ei}(\Omega)\,e^{j\Omega n}\,d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\Omega n}\,d\Omega=\frac{\sin\pi n}{\pi n}=\begin{cases}0, & n\neq 0\\ 1, & n=0\end{cases}=\delta[$$

(0,

Dar $f_{ei}[n]=f[n]$ şi deci:

$$f[n]=\delta[n]$$

0,5p (c.c.t.d.

" $\Leftarrow$ "

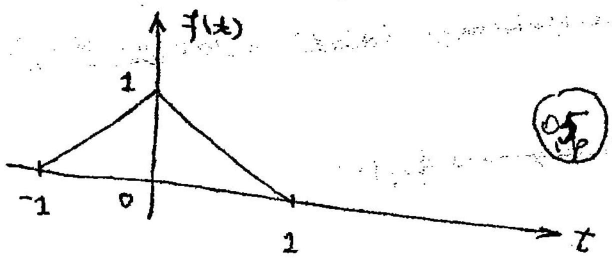
$$f[n]=\delta[n] \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\omega+2k\pi)=1$$

$$f_{ei}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\cdot 1)\,\delta(t-n)\overset{f[n]=\delta[n]}{=\!=}\delta(t)$$ 1p

$$F_{ei}(\omega)=\mathcal{F}\{\delta(t)\}=1\overset{(1)}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\omega+2k\pi)$$ 1p

Deci $\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\omega+2k\pi)=1$ (c.c.t.d.)

b) Funcția folosită pentru realizarea interpolării liniare are graficul din figură:



0,5p

$f(0) = 1$

$f(n) = 0$, pt. $n \neq 0$

Deci $f[n] = \delta[n]$ (

Transformata sa Fourier este:

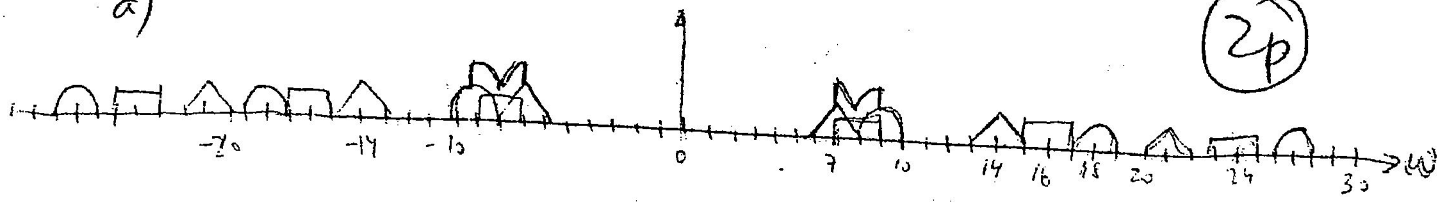
$$F(\omega) = \mathrm{sinc}^2 \frac{\omega}{2}$$ 1p

În acest caz, relația de la punctul a) devine:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2 \left(\frac{\omega}{2} + k\pi \right) = 1$$ 2p (c.c.t.d)

Problema 3 (of - 1p)

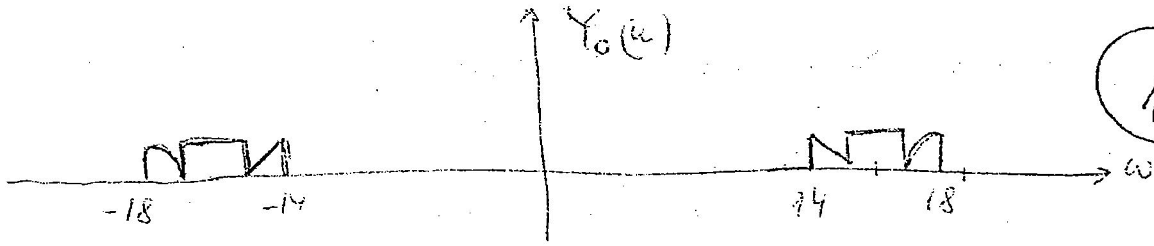
a) (2p)



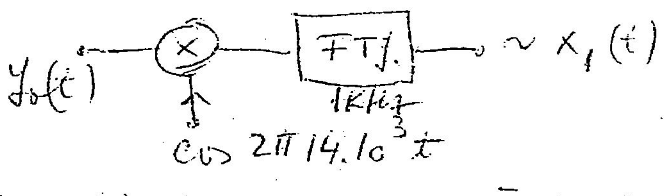
b). Frecvența centrală a filtrului trece bandă este 16 KHz. (1p)

Banda minimă este 4 KHz. (2p)

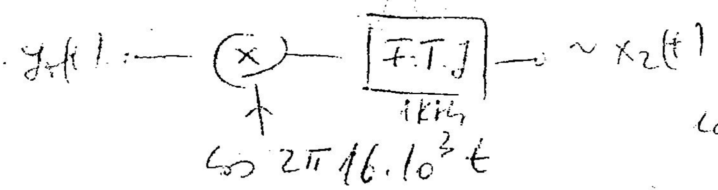
c). Spectrul semnalului $y_0(t)$ este (1,5p)



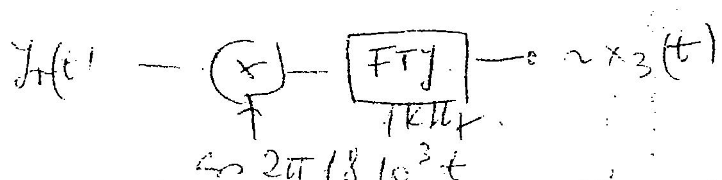
Recuperarea semnalului $x_1(t)$ se face cu sistemul (0,5p)



Semnalul $x_2(t)$ se recuperează cu schema (0,5p)



iar $x_3(t)$ cu (0,5p)



Nivelul ieșirii detectorului pentru $x_2(t)$ este (1p) **dublul** nivelurilor corespunzătoare semnalelor

PROBLEMA 4

(1p of)

$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$.

$X(z)$ poate fi descompus sub forma:

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1-\sqrt{2}\,z^{-1}+z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{(1-e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})} =$$

$$= \frac{A}{1-e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot z^{-1}} + \frac{B}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot z^{-1}},$$ [redacted]

unde:

$$A = (1-e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot z^{-1})\cdot X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{\pi}{4}}} = -j\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$B = (1-e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})\,X(z)\Big|_{z=e^{-j\frac{\pi}{4}}} = j\frac{\sqrt{2}}{2};$$

deci:

$$X(z) = j\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}\right)$$

Pentru $|z|>1$, rezultă că:

$$x[n] = j\frac{\sqrt{2}}{2}\left[e^{-j\frac{\pi}{4}n} - e^{j\frac{\pi}{4}n}\right]\cdot u[n] = \sqrt{2}\,\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)u[n]$$

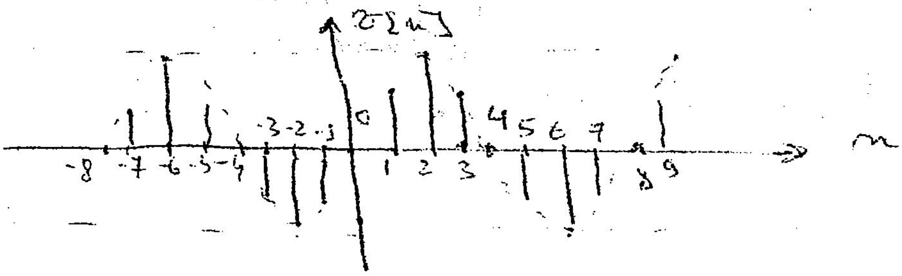
Cum:

$$v[n] = x[n] \circledast \delta[n] + x[n],$$

iar $x[n] \circledast \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n+k] = x[-n]$,

rezultă că:

$$v[n] = x[n] + x[-n] = \sqrt{2}\,\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$ (



Pentru funcția de transfer:

$$H_1(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\cdot e^{-jn\Omega} = \frac{1}{1-a\,e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1-a\cos\Omega + ja\sin\Omega}$$

rezultă că:

$$|H_1(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\Omega}}$$ (

astfel că: $\pm\sqrt{2}\,\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \pm 1 \iff \left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Deci:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

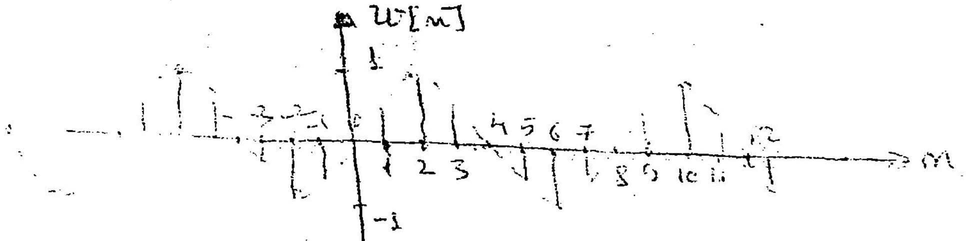
sau $a^2 - \sqrt{2}a - 1 = 0$ $\quad a_{1,2} = \frac{1{,}41 + 2{,}44}{2} = 1{,}\ \quad \frac{1{,}41 - 2{,}44}{2} = -0{,}$

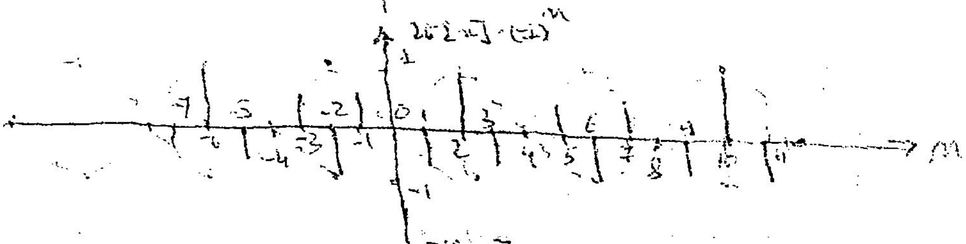
$$\boxed{a = -0{,}516}$$

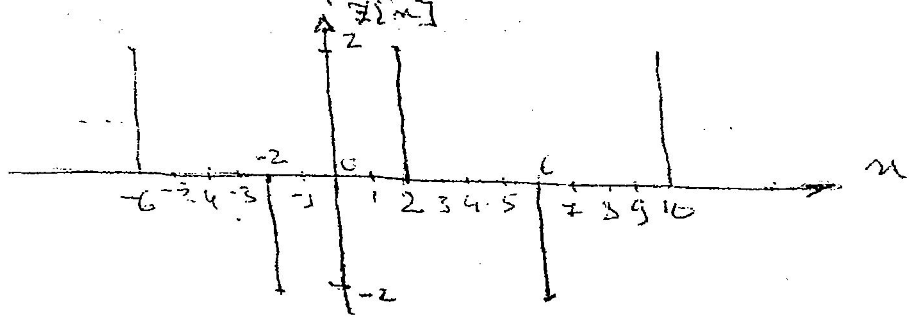
Pentru:

$z[n] = v[n] + v[n]e^{jn\pi} = v[n] + (-1)^n v[n],$

Rezultă:

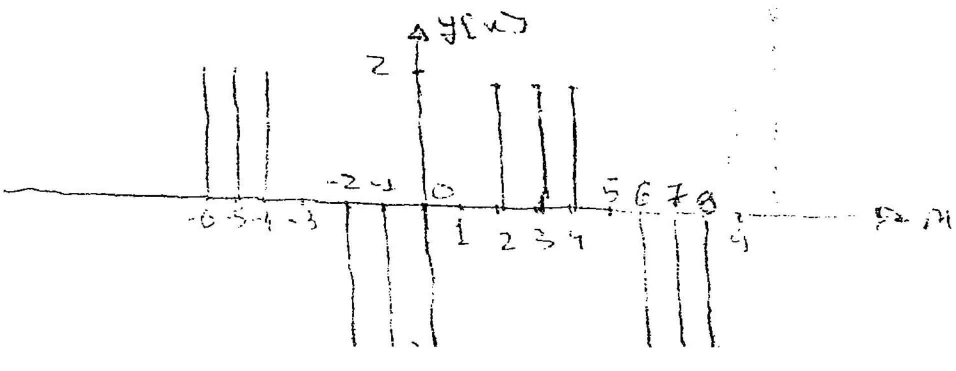






Cum $y[n] = z[n] * h_2[n]$ și $z[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta[n-2-4k]$

rezultă: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k h_2[n-2-4k]$



Deoarece $$Y(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y[n]\, e^{-jn\frac{2\pi}{N}\cdot k} \quad ;\ k=\overline{0,N-1},$$

$$Y(k)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} y[n]\, e^{-jn\frac{\pi}{4}\cdot k},$$

1p

pentru

$k=0 \Rightarrow Y(0)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} y[n]=0$

$k=1 \qquad Y(1)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} y[n]\cdot e^{-jn\frac{\pi}{4}}=0{,}85(1-j)$

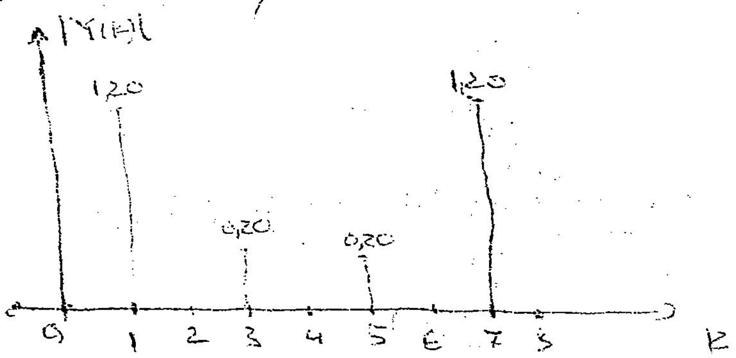
$k=2 \qquad Y(2)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} y[n]\, e^{-j\frac{2n\pi}{4}}=0=Y^{*}(6)$

$k=3 \qquad Y(3)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} y[n]\, e^{-j\frac{3n\pi}{4}}=0{,}14(1+j)=$

$k=4 \qquad Y(4)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} y[n]\, e^{jn\pi}=0$

1p

Graficul cu amplitudinile este:



0,5p

10p

	PROBL. 1	PROBL. 2	PROBL. 3	PROBL 4	TOTAL	
1	1,125	1,75	1,25	1,50	5,625	Cărogeanu Vasile
2	1	3,40	7	3,00	14,40	Tucă Ionescu (T
3	1	1,25	3,5	2,00	7,75	Trifănescu Aurel
4	1,25	4,25	7	6,00	18,50	ATM 3 Oprea Luc
5	1,375	2	4,5	1,50	9,375	Gărgăun Florin Clas
6	6,25	2	6,25	2,25	16,75	Iași 1 Patache N
7	1	4,75	7	2,25	15	Iași 3 Trifina Va
8	5,25	8,50	5,5	4,625	23,875	UPB 1 Cristina Cioc
9	1	2	1	3,625	7,625	UPB Șerbeniuc Em
10	5,75	1,75	7	1,75	16,25	UPB 2 Leahu Lu
11	1	2	2	4,375	9,375	ATM Antohi Mihai
12	1,25	2,75	2	1,375	7,375	UPit. Rizea Florin
13	1,125	2,75	5,75	1,625	11,250	Iași Vrânceanu Ra
14	1	1,25	1	4,00	7,25	ATM Ciculescu
15	10	3	7	1,50	21,50	UPB 2 Enescu And
						A