

PROBLEMA NO 1.

a) Să se determine semnalul $x(t)$ a cărui transformată Fourier este:

$$X(\omega) = j\omega \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2} \quad (\text{expresie și reprezentare grafică})$$

b) Să se determine relația dintre semnalele $g(t)$ și $f(t)$ pentru care:

$$G(\omega) = j\omega \frac{\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\Omega), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

unde $f(t)$ este un semnal de bandă limitată.

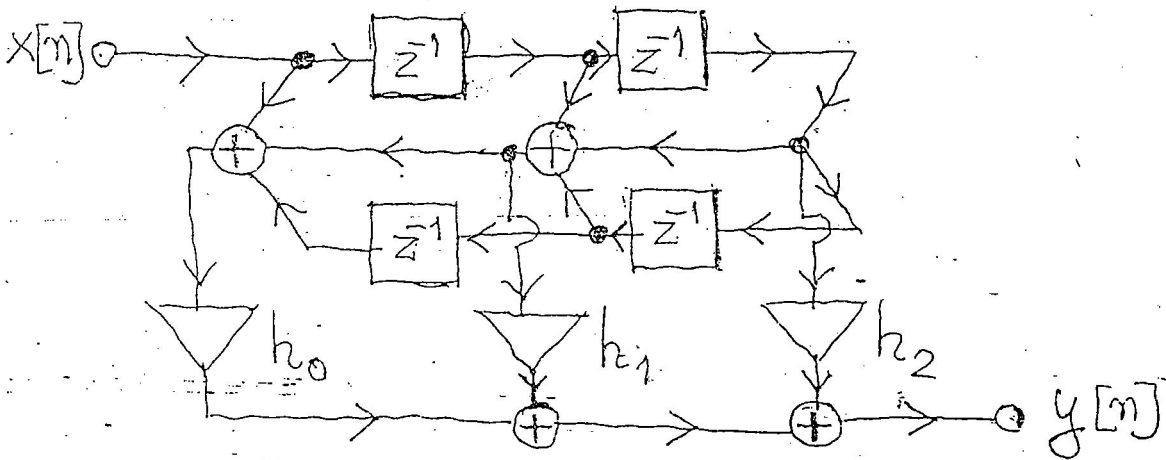
Să se reprezinte grafic $g(t)$ pentru cazul particular $f(t) = \sin\left(\frac{\pi}{5T}t\right)$.

7. Sugerati o alta modalitate de obtinere a semnalului $g(t)$ pornind de la semnalul $f(t)$.

1999 - faza națională

PROBLEMA № 4

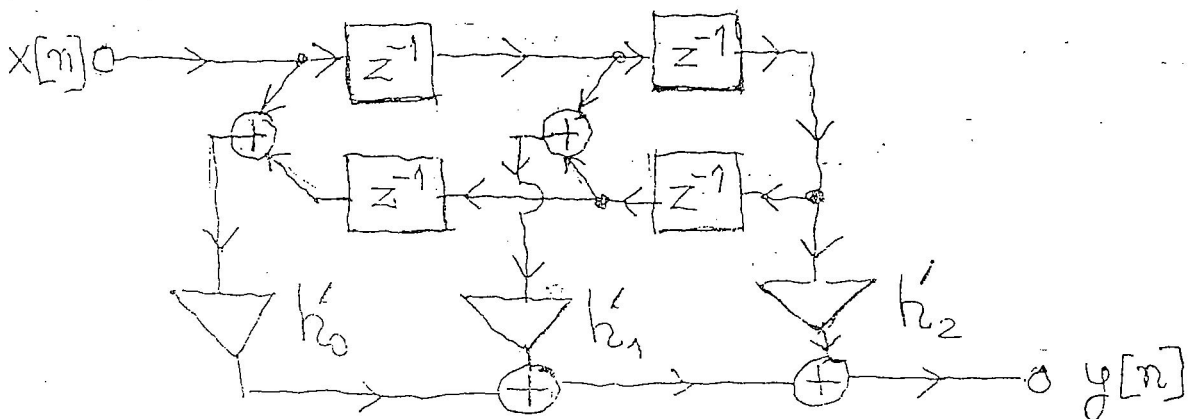
Se da Sistemul Discret (SD) cu schema din figura:



1. Determinați relația în timp discret între semnalul de intrare $x[n]$ și semnalul de ieșire $y[n]$.
2. Determinați expresia modulei răspunsului în frecvență $|H(e^{j\omega})|$ a SD dat, și calculați coeficienții h_0 , h_1 și h_2 ai schemei din figură astfel încât să fie satisfăcute condițiile:
 $|H(0)| = 0$, $|H(e^{j\pi})| = 0$, $|H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = 1$.

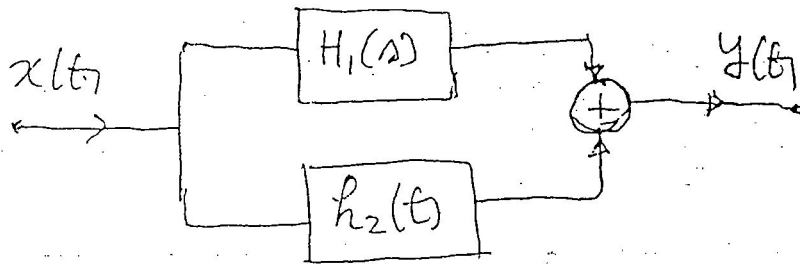
Reprezentati grafic caract. de amplitudine rezultati:

3. Care sunt valorile coeficienților h'_0, h'_1 și h'_2 ai ordinii de mai jos astfel încât aceasta să fie echivalentă cu SD dat inițial.



PROBLEMA N° 2

Se consideră schema de mai jos :



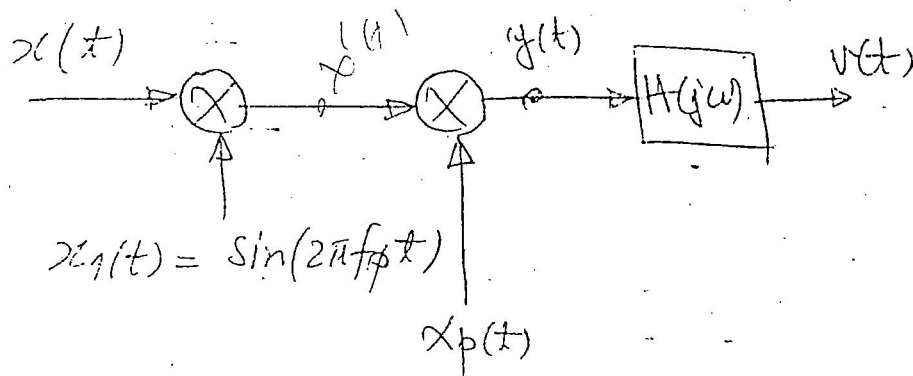
unde $H_1(s) = \frac{s^2}{s^2 + s + \frac{1}{4}}$; $h_2(t) = \frac{t}{2} e^{-t/2} u(t)$.

- Să se determine funcția pondere $h(t)$ a circuitului echivalent și să se reprezinte grafic.
- Să se determine și să se reprezinte grafic răspunsul $y(t)$ al circuitului la semnalul treaptă unitate $u(t)$.
- Să se determine și să se reprezinte grafic răspunsul $y(t)$ la semnalul $x(t) = \sin \frac{t}{\sqrt{2}}$.

PROBLEMA N° 3

Se consideră sistemul din figură, unde $x_p(t)$ este un semnal periodic de perioadă $T = \frac{1}{f_p}$, definit astfel:

$$x_p(t) = \begin{cases} 1 & \text{pt. } t \in [0, \frac{T}{2}) \\ -1 & \text{pt. } t \in [\frac{T}{2}, T) \end{cases}$$



a) Să se determine și să se reprezinte grafic spectrul semnalului $y(t)$, considerând că se aplică semnalul $x(t) = \frac{\sin(\pi f_p t)}{\pi t}$.

b) Să se exprime funcția de transfer $H(j\omega)$ astfel încât să rezulte $v(t) = x(t)$. Care este răspunsul $v(t)$ dacă $x_1(t) = \cos(2\pi f_p t)$ iar $H(j\omega)$ este cel determinat?

Descompunere în serie Fourier sau transformata de Fourier???

Exercise in Laplace TRANSFORM PROBLEM 2

1 pof

$$a) H_2(s) = \mathcal{L}\{h_2(t)\} = \frac{1}{2} \frac{1}{(s + \frac{1}{2})^2}, \operatorname{Re}\{s\} > -\frac{1}{2}$$

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{2}}{s^2 + s + \frac{1}{4}} = \frac{s^2 + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2}, \operatorname{Re}\{s\} > -\frac{1}{2}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

$$H(s) = 1 - \frac{s - \frac{1}{4}}{(s + \frac{1}{2})^2}$$

$$h(t) = \delta(t) - \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d}{ds} \left[(s + \frac{1}{2})^2 \frac{s - \frac{1}{4}}{(s + \frac{1}{2})^2} e^{st} \right] u(t) =$$

$$= \delta(t) - \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d}{ds} \left[(s - \frac{1}{4}) e^{st} \right] u(t) =$$

$$= \delta(t) - \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[e^{st} + (s - \frac{1}{4}) t e^{st} \right] u(t) =$$

$$= \delta(t) + e^{-t/2} \left(\frac{3}{4} t - 1 \right) u(t) = \delta(t) + h_1(t)$$

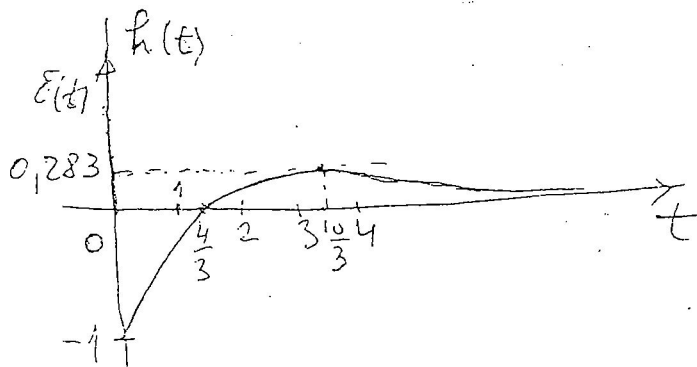
$$? h_1(t) = e^{-t/2} \left(\frac{3}{4} t - 1 \right) u(t) \quad \checkmark$$

$$h_1(t) = 0 \rightarrow t_1 = \frac{4}{3}; h_1(0) = -1, h_1(\infty) = 0$$

$$h_1'(t) = \frac{3}{4} e^{-t/2} - \frac{1}{2} e^{-t/2} \left(\frac{3}{4} t - 1 \right) = e^{-t/2} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{8} t \right) = 0$$

$$\rightarrow t_2 = \infty \text{ and } t_3 = \frac{10}{3}$$

$$h_1\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{3}{2} e^{-5/3} = 0,2833$$



0,5 p

$$b) Y(s) = X(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{2}} + \frac{C}{(s + \frac{1}{2})^2}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = 2; \quad C = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} (s + \frac{1}{2})^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{s^2 + \frac{1}{2}}{s} = -\frac{3}{2} \quad (0,5p)$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d}{ds} \left[(s + \frac{1}{2})^2 Y(s) \right] = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d}{ds} \left[\frac{s^2 + \frac{1}{2}}{s} \right] =$$

$$= \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{s^2} \right) = -1$$

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(s + \frac{1}{2})^2} \quad (1p)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2u(t) - e^{-t/2}u(t) - \frac{3}{2}t e^{-t/2}u(t) =$$

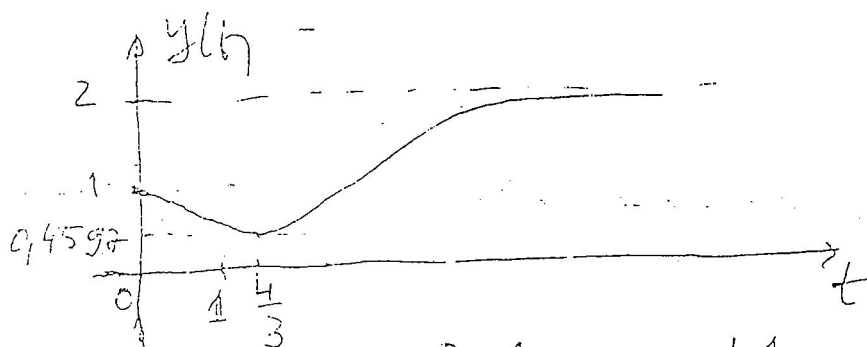
$$= \left[2 - e^{-t/2} \left(1 + \frac{3t}{2} \right) \right] u(t). \quad (1p)$$

$$y(0) = 1 \rightarrow y(\infty) = 2$$

$$y'(t) = -\frac{3}{2}e^{-t/2} + \left(1 + \frac{3t}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}e^{-t/2} =$$

$$= e^{-t/2} \left(\frac{3t}{4} - 1 \right) = 0 \rightarrow t_1 = \frac{4}{3}$$

$$y\left(\frac{4}{3}\right) = 2 - 3e^{-2/3} = 0,4597$$

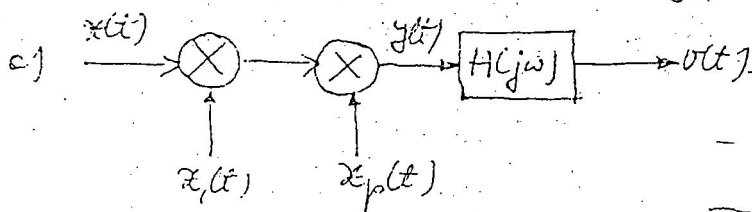


$$c) H(j\omega) = \frac{-\omega^2 + \frac{1}{2}}{-\omega^2 + j\omega + \frac{1}{4}} = \frac{|\frac{1}{2} - \omega^2|}{\sqrt{(\frac{1}{4} - \omega^2)^2 + \omega^2}} e^{j\varphi(\omega)} \quad (0,5p)$$

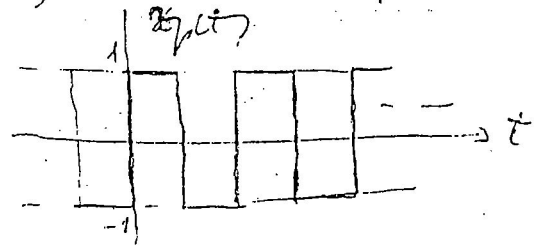
$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega); \quad y(t) = |H(j\frac{1}{\sqrt{2}})| \sin\left[\frac{t}{\sqrt{2}} + \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = C \quad (1p)$$

P3 - Rechner in Betrieb

oficiu (1p)



$$\omega_p = 2\pi f_p = \frac{2\pi}{T}$$



$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{jn\omega_p t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{j(2k+1)\pi} e^{j(2k+1)\omega_p t} \checkmark$$

(1p)

SFT: $A_{nc} = \frac{C_n - jS_n}{2} = -j \frac{S_n}{2} = j \cdot 2A_{nc} = \frac{4}{(2k+1)\pi}$

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin(2k+1)\omega_p t$$

(1p)

$$y(t) = x(t) \cdot x_p(t) \cdot x_p(t) = x(t) \cdot z(t)$$

$$z(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\omega_p t \cdot \sin(\omega_p t) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cos(2k\omega_p t) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cos(2(k+1)\omega_p t) \Rightarrow$$

$k+1 \rightarrow k$ in the second sum, obtain:

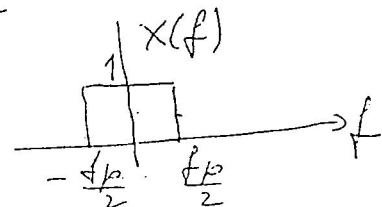
$$z(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) \cos(2k\omega_p t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos(2k\omega_p t) \quad (1p)$$

$$y(t) = x(t) \cdot z(t) = \frac{2}{\pi} x(t) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos(2k\omega_p t) \Rightarrow \quad (0,5p)$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{2}{\pi} X(\omega) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} [X(\omega+2k\omega_p) + X(\omega-2k\omega_p)] \quad (1p)$$

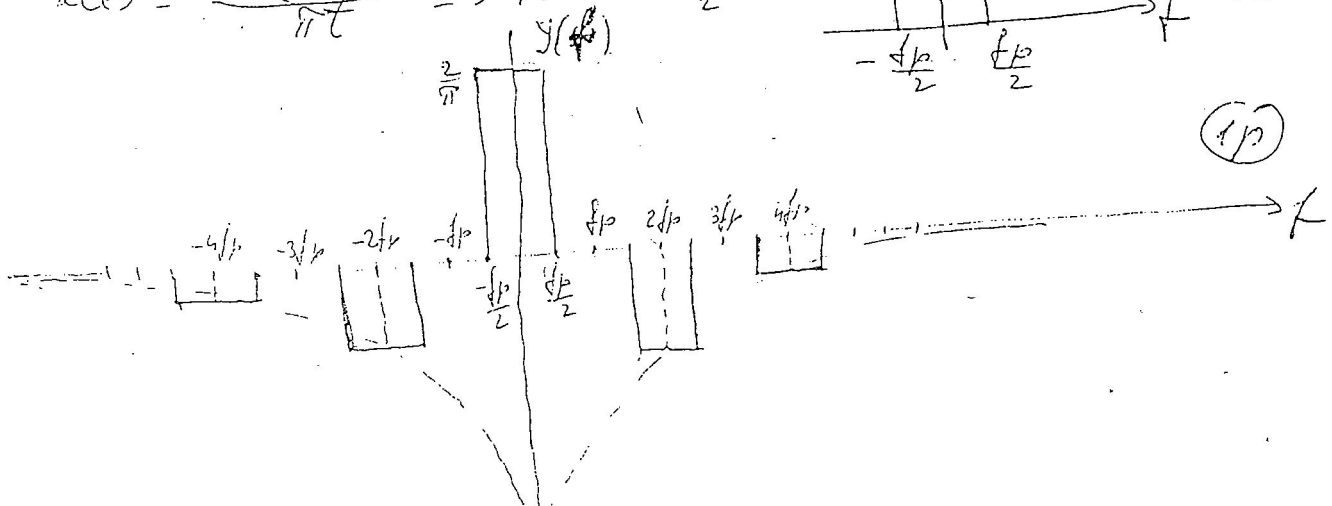
$$= \frac{2}{\pi} X(\omega) - \frac{2}{3\pi} [X(\omega+2\omega_p) + X(\omega-2\omega_p)] - \frac{2}{15\pi} [X(\omega+4\omega_p) + X(\omega-4\omega_p)] - \dots$$

$$x(t) = \frac{\sin(\frac{\omega_p}{2} t)}{\frac{\omega_p}{2}} \Rightarrow X(\omega) = P_{\frac{\omega_p}{2}}(\omega)$$



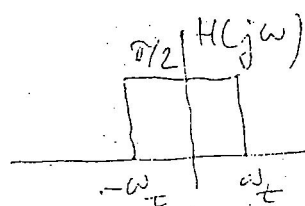
(0,5p)

(1p)



Ex 6.1 $V(\omega) = Y(\omega) \cdot H(j\omega) = X(\omega)$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{if } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad \text{or } \frac{f_p}{2} < f_c < \frac{3f_p}{2}$$



FTS ideal

--- (1p)

6.2

So ca $x_c(t) = \cos(\omega_p t) = 2$

$$z(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\omega_p t \cdot \cos(\omega_p t) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin 2(k+1)\omega_p t + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)}$$

$k+1 \rightarrow k$
 $\Rightarrow z(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1} \sin(2k\omega_p t)$

$$y(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1} \sin(2k\omega_p t) x(t)$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{4}{j\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1} \left[X(\omega - 2k\omega_p) - X(\omega + 2k\omega_p) \right] \quad (1p)$$

$$\Rightarrow Y(\omega) \cdot H(\omega) = V(\omega) = 0 \Rightarrow v(t) = 0 \quad (1p)$$

Rezolvare și barem PROBLEMA 4

ipoteze

Din analiza SD rezultă că:

$$y[n] = \cancel{h_0 x[n]} + \cancel{h_1 x[n-1]} + \cancel{h_2 x[n-2]} + \cancel{h_1 x[n-3]} + \cancel{h_0 x[n-4]} + \dots + \cancel{h_0 x[n-1]} + \cancel{h_1 x[n-2]} + \cancel{h_0 x[n-3]} + \dots + h_0 x[n-2] =$$

$$= h_0 x[n] + (h_0 + h_1) x[n-1] + (h_0 + h_1 + h_2) x[n-2] + (h_0 + h_1) x[n-3] + h_0 x[n-4] \quad (1)$$

(2p)

Funcția de transfer a SD va fi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = h_0 + (h_0 + h_1)z^{-1} + (h_0 + h_1 + h_2)z^{-2} + (h_0 + h_1)z^{-3} + h_0 z^{-4} \quad (2)$$

sau, în domeniul frecvență:

$$H(e^{j\omega}) = h_0 + (h_0 + h_1)e^{-j\omega} + (h_0 + h_1 + h_2)e^{-j2\omega} + (h_0 + h_1)e^{-j3\omega} + h_0 e^{-j4\omega} =$$

$$= h_0 e^{-j2\omega} (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) + (h_0 + h_1)e^{-j\omega} (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + (h_0 + h_1 + h_2)e^{-j2\omega} =$$

$$= e^{-j2\omega} [(h_0 + h_1 + h_2) + 2(h_0 + h_1)\cos\omega + 2h_0 \cos 2\omega]$$

rezultă modulul răspunsului în frecvență:

$$|H(e^{j\omega})| = |h_0 + h_1 + h_2 + 2(h_0 + h_1)\cos\omega + 2h_0 \cos 2\omega| \quad (3)$$

(2p)

Din condițiile:

$$|H(e^{j0})| = |h_0 + h_1 + h_2 + 2(h_0 + h_1) + 2h_0| = 0 \quad (4)$$

$$|H(e^{j\pi})| = |h_0 + h_1 + h_2 - 2(h_0 + h_1) + 2h_0| = 0 \quad (5)$$

$$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = |h_0 + h_1 + h_2 - 2h_0| = 1 \quad (6)$$

rezultă (conform rel (4) și (5):

$$h_0 + h_1 + h_2 + 2h_0 = 0$$

și $h_0 + h_1 = 0$

$$\boxed{h_0 = -h_1} \quad (7)$$

Din relațiile (6) și (7) rezultă

$$h_0 + h_1 + h_2 - 2h_0 = 1$$

$$h_0 + h_1 + h_2 + 2h_0 = 0$$

de unde: $4h_0 = -1$

$$\boxed{h_0 = -\frac{1}{4}} \quad (8)$$

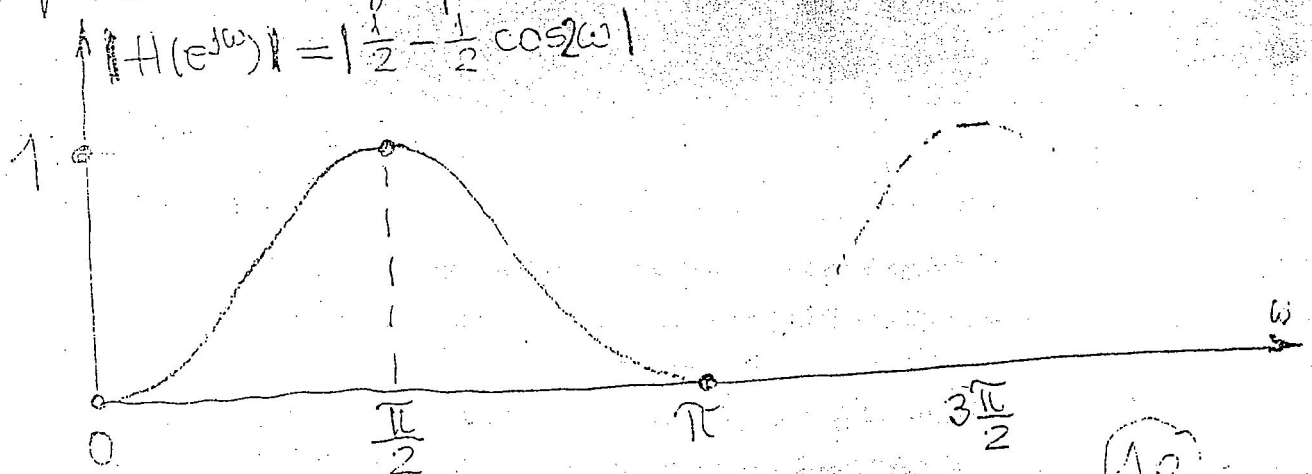
și $2(h_0 + h_1 + h_2) = 1$ și conform (5) $\Rightarrow$

$$\boxed{h_1 = \frac{1}{4}} \quad (9)$$

Conform (9) și (10) rezultă $k_2 = \frac{1}{2}$ (11)

(2p)

Reprezentarea grafică a caracteristicii de amplitudină



(1p)

Conform schemei din figură rezultă că :
relația între intrare-ieșire este :

$$y[n] = k'_0 \times [n] + k'_1 \times [n-1] + k'_2 \times [n-2] + k'_1 \times [n-3] + k'_0 \times [n-4] \quad (12)$$

sau, funcția de transfer :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = k'_0 + k'_1 z^{-1} + k'_2 z^{-2} + k'_1 z^{-3} + k'_0 z^{-4} \quad (13)$$

(1p)

Comparând relațiile (1) cu (12) sau (2) cu (13) rezultă valorile coeficienților k'_0 , k'_1 și k'_2 care realizează echivalența celor două scheme :

$$\begin{aligned} k'_0 &= k_0 \\ k'_1 &= k_0 + k_1 \\ k'_2 &= k_0 + k_1 + k_2 \end{aligned}$$

(1p)

Se determină originale transformării $\frac{z}{z^2+1} \leftrightarrow \frac{1}{z^2+1}$

Avem $\cos(\omega n T) \leftrightarrow \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

$\sin(\omega n T) \leftrightarrow \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

Pentru $\begin{cases} \cos \omega T = 0 \\ \sin \omega T = 1 \end{cases}$ adică $\omega T = \frac{\pi}{2}$ rezultă

$$\begin{array}{l} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) \longleftrightarrow \frac{z^2}{z^2+1} \\ \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \longleftrightarrow \frac{z}{z^2+1} \end{array}$$

Deci $y[n] = 2 \delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta[n] - \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) \delta[n] + \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \delta[n]$

CONCURSUL PROFESIONAL "TUDOR TĂNĂTESCU"

Faza națională 1998

SECȚIUNEA: Semnale, Circuite și Sisteme

SUBIECTUL 1:

Se consideră schema-bloc din figura 1:

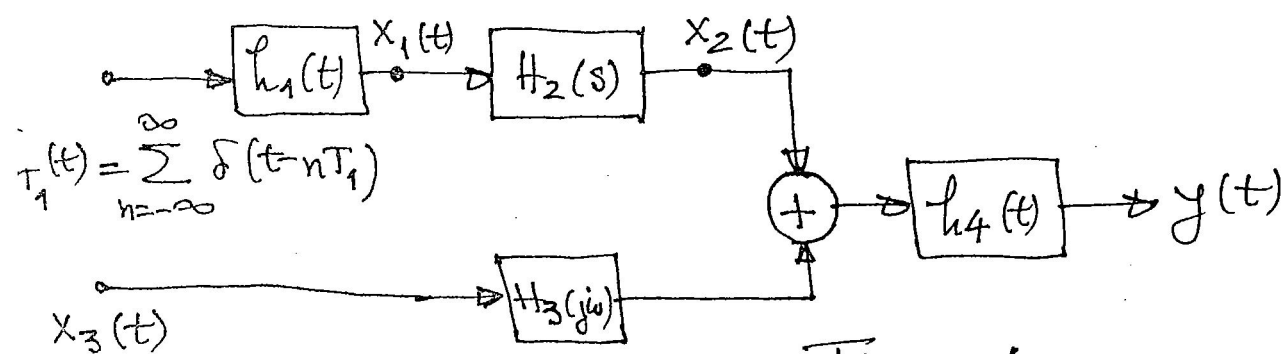


Figura 1

În care sistemele liniare și invariante în timp sunt definite prin:

$$h_1(t) = u(t) - u(t - \frac{T_1}{2});$$

$$H_2(s) = \frac{a}{s+a}; \quad a \in \mathbb{R}_+$$

$$H_3(j\omega) = e^{j\frac{\pi}{4}}; \quad \omega_1 t$$

$$h_4(t) = 2 \frac{\sin \frac{\omega_1 t}{2}}{\pi t} \cos(3\omega_1 t); \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

($u(t)$ este semnalul treaptă unitate).

Semnalul $x_3(t)$ este dat în figura 2:

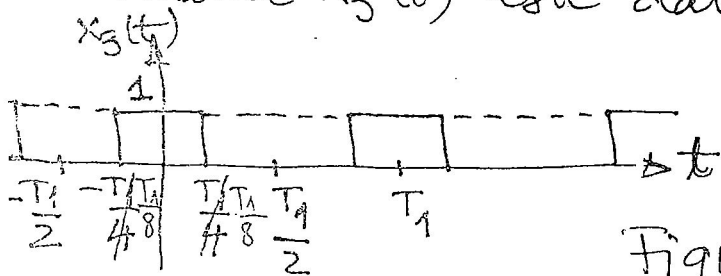


Figura 2

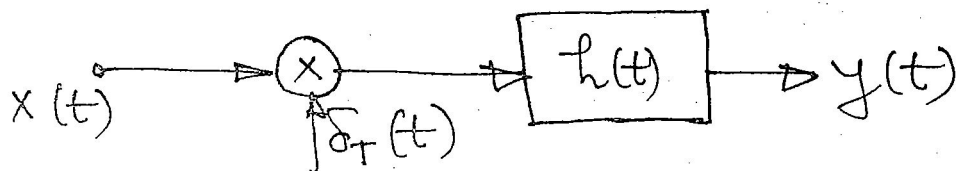
Se cere:

- Să se determine și să se reprezinte grafic spectrul de amplitudini al semnalului $x_3(t)$.

- b) Să se determine constanta a astfel încât armonicile a 3-a ale semnalelor $x_2(t)$ și $x_3(t)$ să aibă aceeași amplitudine.
- c) Să se determine răspunsul $y(t)$ în condițiile de la punctul b).

SUBIECTUL 2:

Se consideră schema bloc din figură:



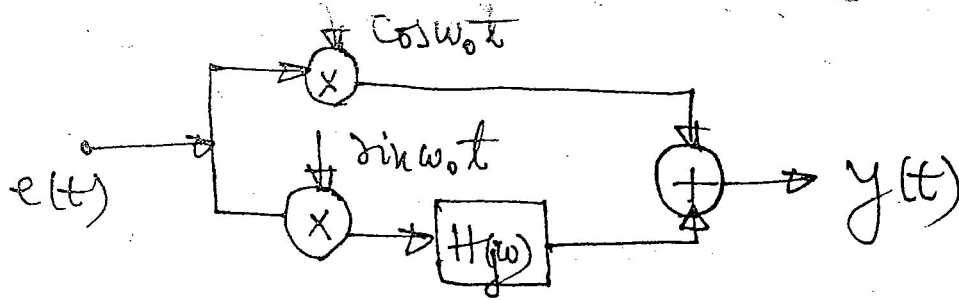
Sistemul linear și invariant în timp are funcția pondere $h(t) = \frac{\sin 8\pi t}{\pi t} \cos 60\pi t$, iar $T = 58 \text{ ms}$.

- a) Să se determine și să se reprezinte grafic răspunsul $y(t)$ în domeniile timp și frecvență, marcând pe axele de coordonate valorile semnificative.
- b) Să se interpreteze rezultatul obținut la a) prin prima eantionare uniformă.

$$x(t) = \left(\frac{\sin 4\pi t}{\pi t} \right)^2 \cos(60\pi t)$$

SUBIECTUL 3:

Se consideră sistemul cu schema-bloc din figură:



unde $H(j\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega$.

- Să se determine răspunsul sistemului la semnalul de intrare $e(t) = \cos \omega_1 t$, pentru cazurile:
 - $\omega_0 > \omega_1$; ii) $\omega_0 < \omega_1$.
- Să se determine răspunsul sistemului pentru un semnal de intrare de bandă limitată, cu frecvența maximă $\omega_{\max} < \omega_0$.
- Pentru condițiile de la punctul b) să se studieze efectul inversării ordinii blocurilor de pe ramura inferioară asupra răspunsului $y(t)$.

SUBIECTUL 4:

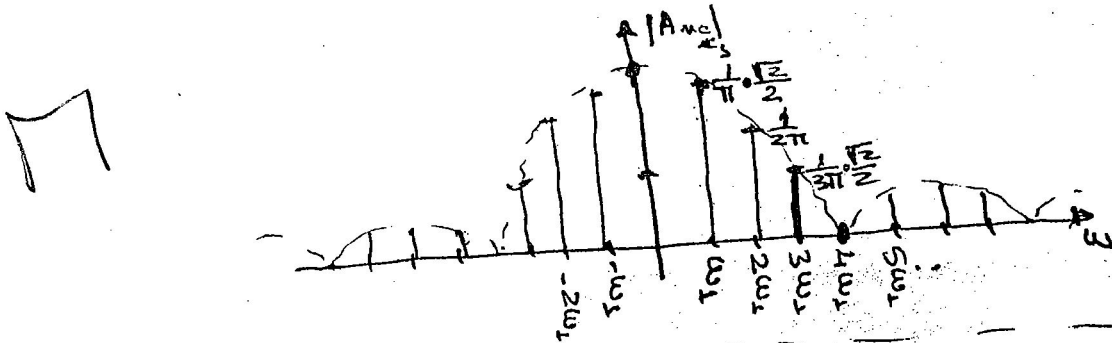
Se consideră sistemul discret, liniar și invariant în timp, cu funcția de transfer $H(z) = 1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}$.

- Să se determine și să se reprezinte grafic modulul și faza funcției de transfer, marcând pe axe de coordonate valorile semnificative.
- Să se determine și să se reprezinte grafic răspunsurile $y_1[n]$ și $y_2[n]$ ale sistemului la semnalele de intrare $x_1[n] = 2 + \sqrt{2} \left(1 + \cos \frac{n\pi}{8} \cos \frac{3n\pi}{8} \right)$ respectiv $x_2[n] = u[n] \sin \frac{n\pi}{4}$ ($u[n]$ este treapta unitate discretă).

$$x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{ncx_3} e^{jn\omega_1 t} ; A_{ncx_3} = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{4}$$

1

$$x_3(t) = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) e^{jn\omega_1 t}$$



1

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j\pi(2n-1)} e^{j(2n-1)\omega_1 t}$$

1

$$A_{3cx_1} = \frac{1}{j3\pi} = \frac{1}{3\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

0.5

$$H_2(j\omega) = \frac{a}{a+j\omega} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-j \arctan \frac{\omega}{a}}$$

0.5

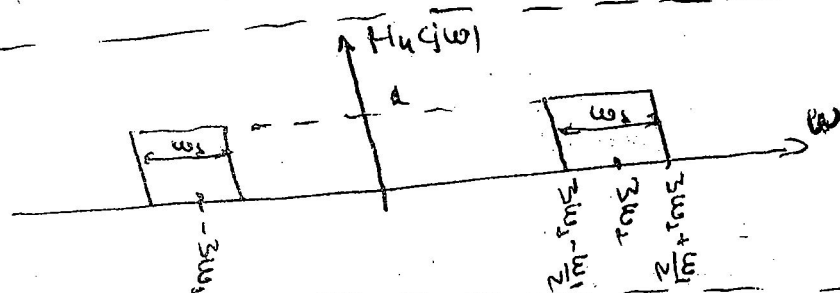
$$A_{3cx_2} = \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + 9\omega_1^2}} e^{-j \left(\arctan \frac{3\omega_1}{a} + \frac{\pi}{2} \right)}$$

$$|A_{3cx_2}| = |A_{3cx_3}| \Leftrightarrow \frac{1}{3\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 9\omega_1^2}} = \frac{1}{3\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1

$$4a^2 = 2a^2 + 18\omega_1^2 \Rightarrow \boxed{a = 3\omega_1}$$

$$H_2(j3\omega_1) = \frac{3\omega_1}{\sqrt{(3\omega_1)^2 + (3\omega_1)^2}} e^{-j \arctan \frac{3\omega_1}{3\omega_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$



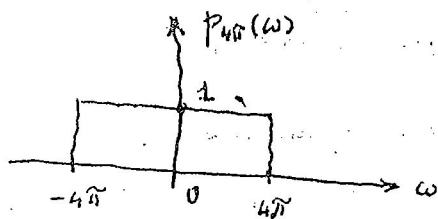
$$\begin{aligned} & \{ A_{3cx_1} H_2(j3\omega_1) + A_{3cx_3} H_3(j3\omega_1) \} e^{j3\omega_1 t} = \left[\frac{1}{3\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \right] e^{j3\omega_1 t} \\ & = \frac{1}{3\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} [e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{j\frac{\pi}{2}}] \cdot e^{j3\omega_1 t} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3\pi} e^{-j\frac{\pi}{4}} 2 \cos \frac{\pi}{2} e^{j3\omega_1 t} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(t) = 0$$

obiectul 2.

rezolvare

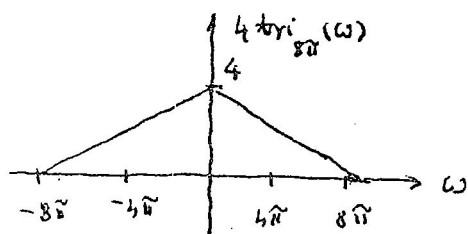
Fie $x_m(t) = \frac{\sin 4\pi t}{\pi t} \Rightarrow X_m(\omega) = p_{4\pi}(\omega)$, ^(0,5p) cu graficul din figura:



Transformata Fourier a semnalului $x_m^2(t)$ este:

$$\mathcal{F}\{x_m^2(t)\}(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) [\mathcal{F}\{x_m(t)\}(\omega) * \mathcal{F}\{x_m(t)\}(\omega)] =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right) [p_{4\pi}(\omega) * p_{4\pi}(\omega)] = 4 \text{ tri}_{8\pi}(\omega),$$
 ^(0,5p) cu graficul din figura:



Transformata Fourier a semnalului $x(t)$ este:

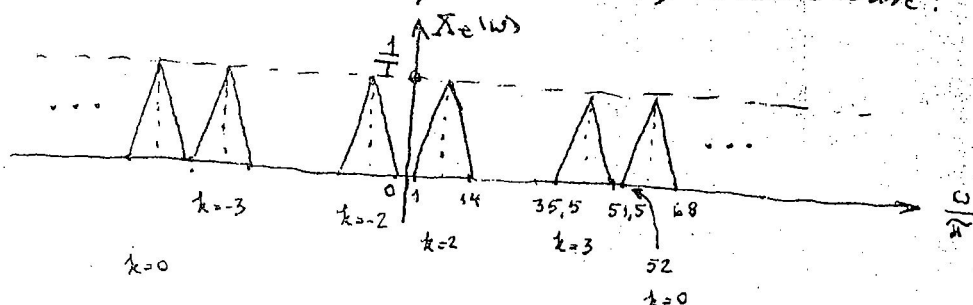
$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x_m^2(t) \cos 60\pi t\} = \frac{1}{2\pi} [\mathcal{F}\{x_m^2(t)\}(\omega) * \mathcal{F}\{\cos 60\pi t\}] =$$

$$\frac{1}{2\pi} [4 \text{ tri}_{8\pi}(\omega) * \pi (\delta(\omega - 60\pi) + \delta(\omega + 60\pi))] = 2 [\text{tri}_{8\pi}(\omega - 60\pi) + \text{tri}_{8\pi}(\omega + 60\pi)]$$
 ^(1p)

Fie $x_e(t) = x(t) \delta_T(t) \Rightarrow X_e(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k \frac{2\pi}{T})$ ^(0,5p)

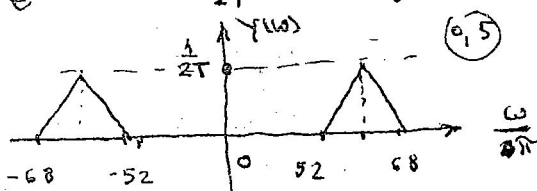
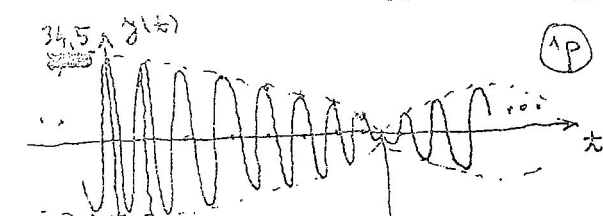
$\frac{2\pi}{T} = 34,5\pi$ ^(0,5p)

graficul funcției $X_e(\omega)$ este prezentat în figura următoare:



$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin 8\pi t}{\pi t} \cos 60\pi t\right\} = \frac{1}{2\pi} \left[\mathcal{F}\left\{\frac{\sin 8\pi t}{\pi t}\right\} * \mathcal{F}\{\cos 60\pi t\}\right] = \frac{1}{2\pi} [p_{8\pi}(\omega) * \pi (\delta(\omega - 60\pi) + \delta(\omega + 60\pi))]$$

$$\frac{1}{2} [p_{8\pi}(\omega - 60\pi) + p_{8\pi}(\omega + 60\pi)] ; Y(\omega) = X_e(\omega) \#(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi} x(t)$$
 ^(1p)



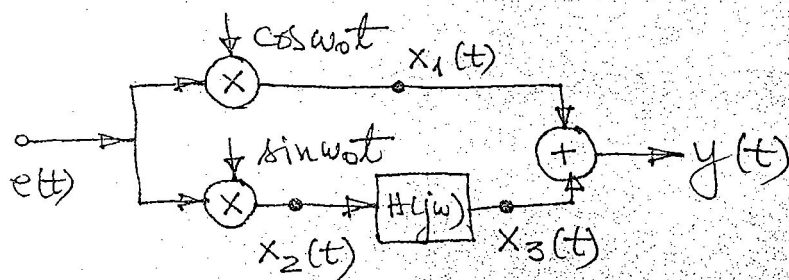
b) Semnalul $y(t)$ este proportional cu semnalul $x(t)$. Deci semnalul $x(t)$ poate
fi recuperat din eantioanele sale de eantionare s-a facut cu frecventa $17,25 \text{ Hz}$,
iar prezenta maxima din spectrul lui $x(t)$ este de 34 Hz . 0,5 p

Nu este indeplinita conditia din teorema eantionarii. 1 p

Reconstructia este posibila deoarece semnalul $x(t)$ este de tip trece banda.
0,5 p

SUBIECTUL 3:

REZOLVARE



a) Cazul $\omega_0 > \omega_1$:

$$x_1(t) = \cos \omega_1 t \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} \cos(\omega_0 + \omega_1)t + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 - \omega_1)t$$

$$X_1(\omega) = \frac{\pi}{2} \left[\delta(\omega - \omega_0 - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_0 + \omega_1) \right] + \frac{\pi}{2} \left[\delta(\omega - \omega_0 + \omega_1) + \delta(\omega + \omega_0 - \omega_1) \right]$$

(1p) $x_2(t) = \cos \omega_1 t \sin \omega_0 t = \frac{1}{2} \sin(\omega_0 + \omega_1)t + \frac{1}{2} \sin(\omega_0 - \omega_1)t$

$$X_2(\omega) = \frac{\pi}{2j} \left[\delta(\omega - \omega_0 - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_0 + \omega_1) \right] + \frac{\pi}{2j} \left[\delta(\omega - \omega_0 + \omega_1) - \delta(\omega + \omega_0 - \omega_1) \right]$$

$$X_3(\omega) = \frac{\pi}{2j} \left[-j \delta(\omega - \omega_0 - \omega_1) - j \delta(\omega + \omega_0 + \omega_1) \right] + \frac{\pi}{2j} \left[-j \delta(\omega - \omega_0 + \omega_1) - j \delta(\omega + \omega_0 - \omega_1) \right]$$

$$Y(\omega) = X_1(\omega) + X_3(\omega) = 0$$

~~cazul~~ Cazul $\omega_0 < \omega_1$:

$X_1(\omega)$ și $X_2(\omega)$ ca mai sus.

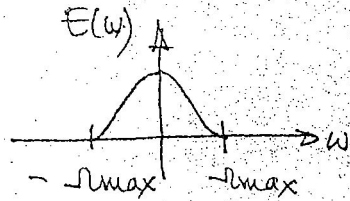
$$X_3(\omega) = \frac{\pi}{2j} \left[-j \delta(\omega - \omega_0 - \omega_1) - j \delta(\omega + \omega_0 + \omega_1) \right] +$$

(1p)
$$+ \frac{\pi}{2j} \left[j \delta(\omega - \omega_0 + \omega_1) + j \delta(\omega + \omega_0 - \omega_1) \right]$$

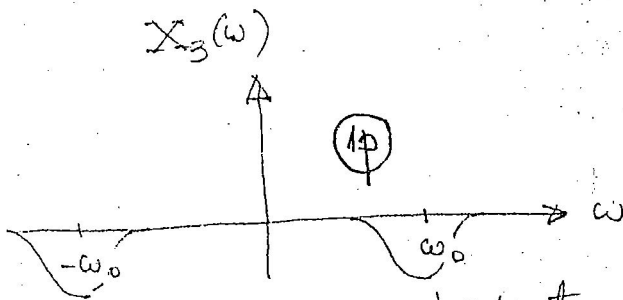
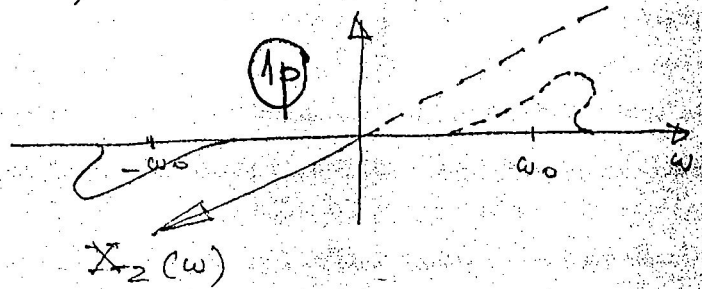
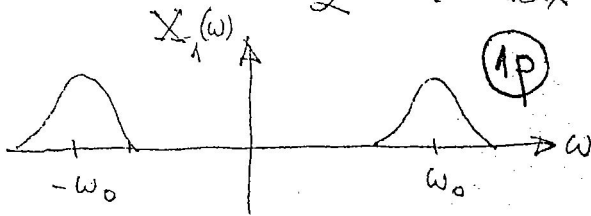
$$Y(\omega) = X_1(\omega) + X_3(\omega) = \pi \left[\delta(\omega - \omega_0 + \omega_1) + \delta(\omega + \omega_0 - \omega_1) \right]$$

$$y(t) = \cos(\omega_0 - \omega_1)t$$

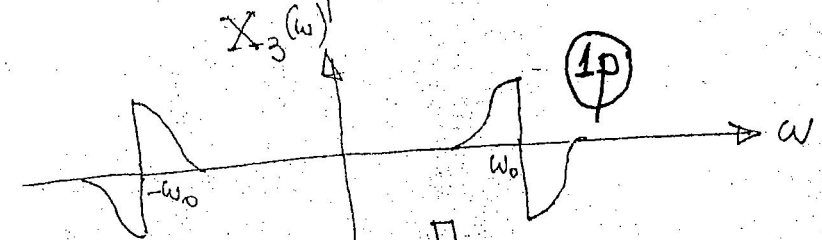
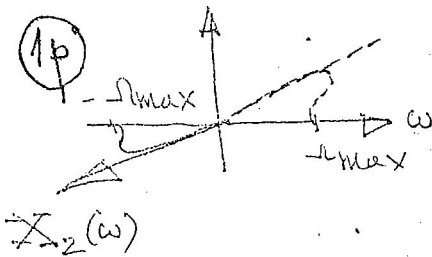
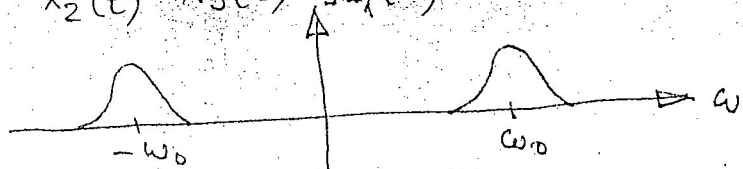
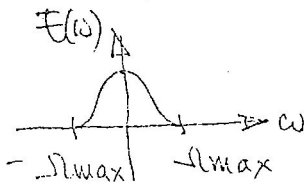
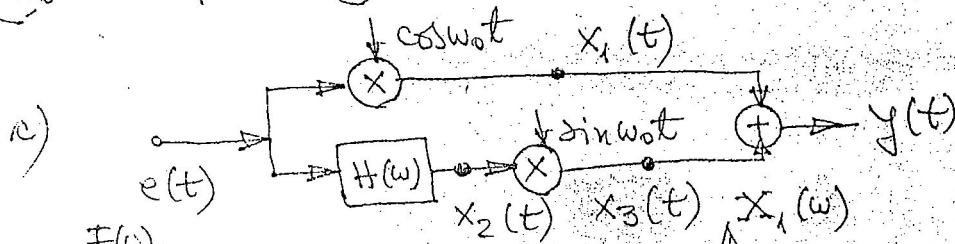
b) Fie $e(t)$ un semnal de bandă limitată la $\Omega_{\max}$:



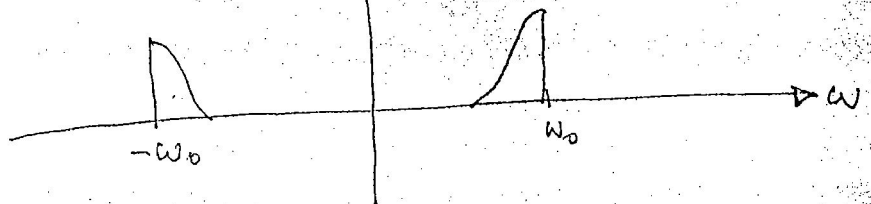
Specetre semnalelor reprezentative din sistem sunt după cum urmează ($\Omega_{\max} < \omega_0$):



$$Y(\omega) = X_1(\omega) + X_3(\omega) = 0$$



$$Y(\omega) = X_1(\omega) + X_3(\omega)$$

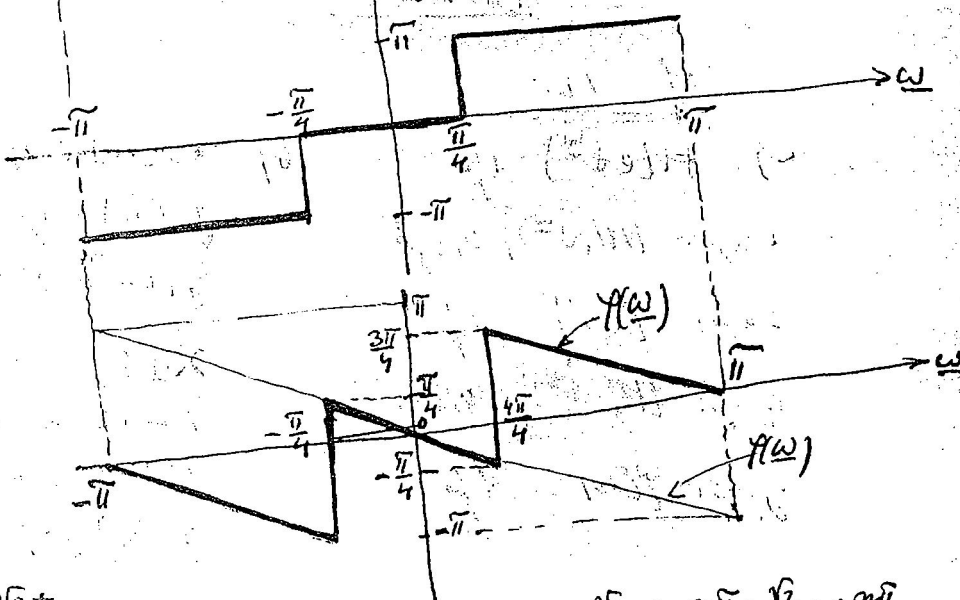
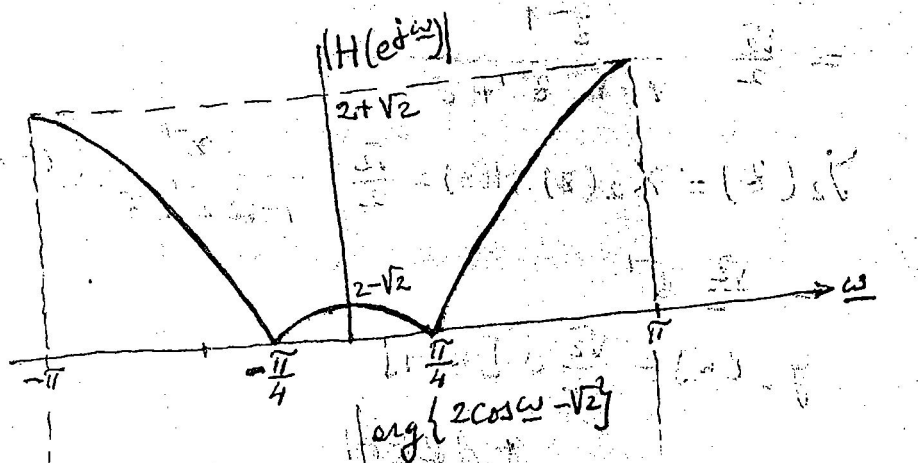
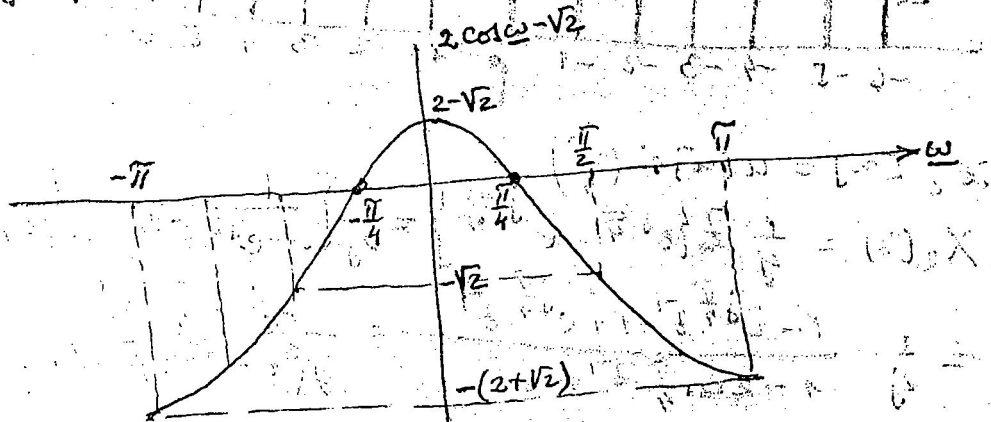


Lösung

Subiectul 4

$$e) H(e^{j\omega}) = 1 - \sqrt{2}e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} = e^{-j\omega}(e^{j\omega} - \sqrt{2} + e^{-j\omega}) = e^{-j\omega}(2\cos\omega - \sqrt{2})$$

$$|H(e^{j\omega})| = |2\cos\omega - \sqrt{2}|; \varphi(\omega) = -\omega + \arg\{2\cos\omega - \sqrt{2}\}$$



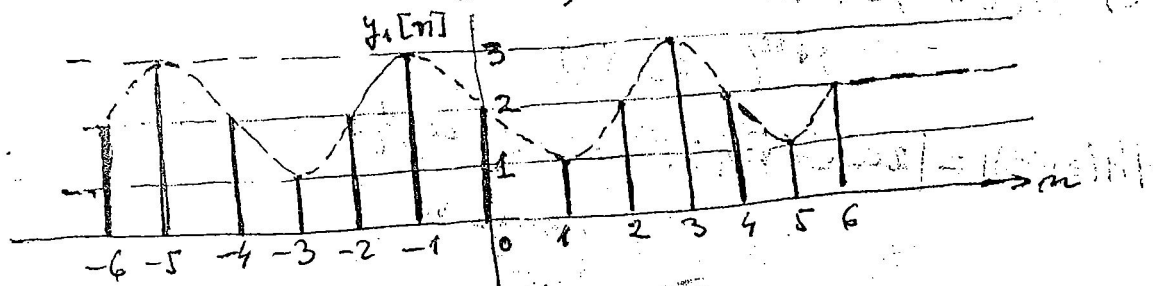
$$f) x_1[n] = 2 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{n\pi}{4} = (2 + \sqrt{2}) \cos(0 \cdot n) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$p.t. x_1[n] = \cos(n\omega_0) \rightarrow y_1[n] = 1 \cdot |H(e^{j\omega_0})| \cos(n\omega_0 + \varphi(\omega_0))$$

$$\begin{aligned} \omega_0 = 0 &\rightarrow H(e^{j0}) = 2 - \sqrt{2} \\ \omega_0 = \frac{\pi}{4} &\rightarrow H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = e^{-j\frac{\pi}{4}}(2\cos\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}) = 0 \\ \omega_0 = \frac{\pi}{2} &\rightarrow H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = e^{-j\frac{\pi}{2}}(2\cos\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}) = \sqrt{2}e^{j(\pi - \frac{\pi}{2})} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_1[n] = (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 4 - 2 + \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2 - \cos\frac{n\pi}{2}$$



$$x_2[n] = u[n] \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$X_2(z) = \frac{1}{zj} \sum \{e^{j\frac{\pi}{4}} - e^{-j\frac{\pi}{4}}\} = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - e^{j\frac{\pi}{4}} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}} z^{-1}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2j} \frac{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}} z^{-1} - 1 + e^{j\frac{\pi}{4}} z^{-1}}{1 - 2\cos\frac{\pi}{4} z^{-1} + z^{-2}} = \frac{2j \sin\frac{\pi}{4} \cdot z^{-1}}{2j(1 - 2\cos\frac{\pi}{4} z^{-1} + z^{-2})} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \sqrt{2} z^{-1} + z^{-2}}$$

$$Y_2(z) = X_2(z) \cdot H(z) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \sqrt{2} z^{-1} + z^{-2}} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - \sqrt{2} z^{-1} + z^{-2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} z^{-1}$$

$$y_2[n] = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta[n-1]$$

BAREM

of. 1p

a) $H(e^{j\omega})$ 1p

expr. $|H(e^{j\omega})|$ 0,5p

expr. $\varphi(\omega)$ 1p

grafic $|H(e^{j\omega})|$ 0,5p

grafic $\varphi(\omega)$ 1p

b) $x_1[n]$ expr. 0,5p

$y_1[n]$ expr. 0,5p (3x0,5)

$y_1[n]$ grafic 0,5p

$X_2(z)$ 1p

$Y_2(z)$ 0,5p

$y_2[n]$ expr. 0,5p

$y_2[n]$ grafic 0,5p

$$c) A(\omega) = \frac{1}{(\frac{\omega T}{2})^2} \rightarrow \frac{1}{T} \text{tri}(t), \quad \text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

$$X(\omega) = j\omega A(\omega) \Rightarrow x(t) = \frac{d}{dt} \text{tri}(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \left(-\frac{t}{T}\right), & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

Deci:

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{T^2}, & 0 \leq t \leq T \\ \frac{1}{T^2}, & -T \leq t < 0 \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

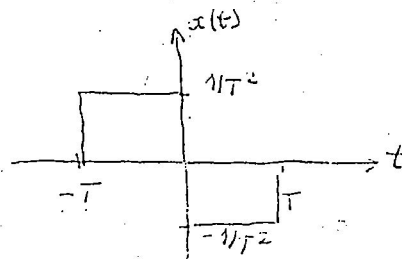


Figura 1.

$$b) G(\omega) = X(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\Omega) = (F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega)) X(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(t) = x(t) * (\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\frac{2\pi}{\Omega})) = \frac{2\pi}{\Omega} \left[x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\frac{2\pi}{\Omega}) \right]$$

sau:

$$g(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) x(t - nT)$$

$$\text{Fie: } h_f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{T^2} [h_f(t+T) - h_f(t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(t) = T^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) (h_f(t+T-nT) - h_f(t-nT)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(t) = T^{-1} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) h_f(t - (n-1)T) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) h_f(t - nT) \right] \quad (1)$$

$$\Rightarrow g(t) = T^{-1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) h_f(t - nT) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) h_f(t - nT) \right) \quad (2)$$

Făcând în prima sumă din (1) schimbarea de variabilă $m' = n-1$, și apoi revenind la variabila n , se obține:

$$g(t) = T^{-1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(nT) - f(nT)] h_f(t - nT) \right) \quad (3)$$

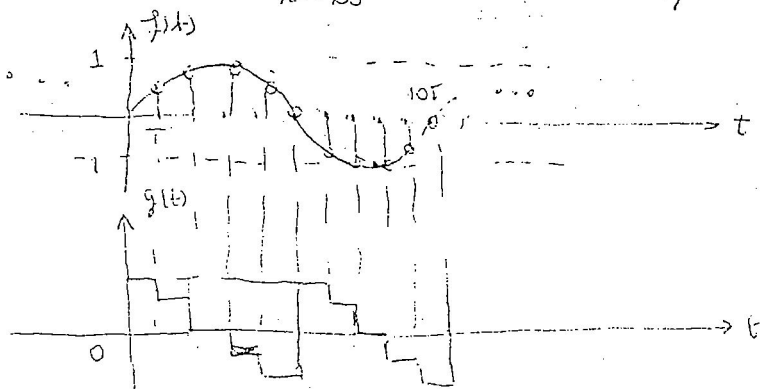


Figura 2

Relația (2) sugerează descurajarea sumării lui $g(t)$ pentru două succesiuni de impulsuri cu amplitudine...

TUDOR TĂHĂSESCU

TABEL CENTRALIZATOR - SEI 1998, 9 mai

Sub. 1	Sub. 2	Sub. 3	Sub. 4	Abordare	Numere	Ordinea
5,25	3,50	5,00	4,50	18,25	Asimile Gauril - Jari	(7) ✓
6,25	7,000	3,00	7,00	23,25	Tordache D-tra - ATM	(4) ✓ (3-4)
7,50	3,75	2,00	4,25	17,50	Andrei Dorin - ATM	8-9
3,25	2,25	3,00	1,00	9,50	Gândilă Mircea - Timiș	(14)
9,00	6,00	1,75	3,50	20,25	Munteanu Dor - ATM	(5) (5)
6,75	2,75	2,00	3,25	14,75	Vitănescu Mihai - Jari	(10) ✓
3,50	4,00	2,00	4,50	16,00	Stan I. Teneu - Buc	11-12
3,50	1,50	2,00	7,00	14,00	Goaba Andrei - Buc	11-12
7,50	9,25	1,500	5,00	23,25	Penisoara Mic - ATM	(3) ✓ (3-4)
4,00	6,25	6,50	4,50	18,25	Toma Gheorghe - Timiș	(6)
2,50	2,00	1,50	1,75	7,75	Tănăsescu Gheorghe - Timiș	(15)
5,75	2,25	5,50	4,00	17,50	Moldor Cristian - ATM	8-9
9,75	7,25	8,00	9,25	34,25	Bucurari Cristian - Buc	(11) ✓ (1)
1,75	2,00	6,00	1,75	11,50	Aghian Cristian - Jari	(13) ✓
7,50	6,50	8,00	5,25	27,25	Moraru Daniel - Buc	(2) ✓ (2)
3,50	1,00	1,00	1,00	6,50	Iacobuț Gh. - Jari	(16) ✓

rev. 0 (2) comp. rev (9) 23,125 23,75

rev 15 (5) 19,50
6 (10) 18,00
(7) (1) 18,25
8-9 (1) 17,50
8-9 (2) 17,50