CONCURSUL PROFESIONAL-ȘTIINȚIFIC STUDENȚESC DE ELECTRONICĂ
SUBSECȚIA SEMNALE ȘI SISTEME
TIMIȘOARA 1988

I Se consideră un sistem neliniar care are o caracteristică exprimată printr-un polinom de grad n cu coeficienți reali $y(t)=\sum_{0}^{n} a_k x^k(t)$, unde $a_n \neq 0$, $n<100$, $x(t)$ este semnalul de la intrare iar $y(t)$ răspunsul de la ieșirea sistemului.

La intrarea sistemului se aplică un semnal MA-PS, $x(t)$, obținut prin modularea unei purtătoare, $x_0(t)=A_0 \cos 2\pi f_0 t$, de către un semnal neperiodic, $x_m(t)$, $x_m(t)\in R$, de bandă limitată astfel încât funcția sa spectrală, $X_m(2\pi f)$ să se anuleze pentru frecvențe $f \geq f_M$.

Cunoscând mărimile f_0 și f_M ($f_0 \geq 100 f_M$) să se determine benzile de frecvență (suportul pentru frecvențe pozitive) ocupate de spectrul răspunsului $y(t)$.

Utilizați acest rezultat în cazurile particulare:

a) $f_0 = 1MHz$, $f_M = 10KHz$ și element neliniar cu caracteristica $y(t)=4x^3(t)+3x^2(t)+5x(t)+1$.

b) $f_0 = 1MHz$, $f_M = 10KHz$ și element neliniar cu caracteristica $y(t)=x^6(t)+4x^4(t)+2x^2(t)+x(t)$.

II Se dă semnalul limitat în timp, $x(t)=\begin{cases}\cos \omega_0 t & |t|\leq \frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$

care se repetă cu perioada $\overset{T_0 \ll \tau < T}{~~T_0~~}\ T$ ($T=2\pi/\Omega_0$, $T_0=2\pi/\omega_0$), rezultând semnalul periodic $x_p(t)$.

1) Ce condiții trebuie să îndeplinească $x(t)$ pentru ca răspunsul circuitului din fig. 1 (A.O ideal) la $x_p(t)$ să fie o funcție periodică, $y_p(t)$?

2) Se aplică semnalul $y_p(t)$ de la punctul precedent la intrarea circuitului din fig. 2, unde filtrul trece jos FTJ este ideal cu frecvența de tăiere ω_0. Să se determine restricțiile impuse parametrilor semnalului $x_p(t)$ pentru ca semnalul de ieșire $z_p(t)$ să fie periodic, cu perioadă $T\times N$ (N natural fixat)

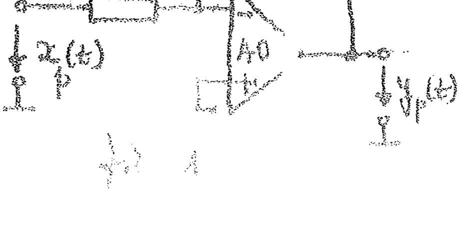


fig. 1

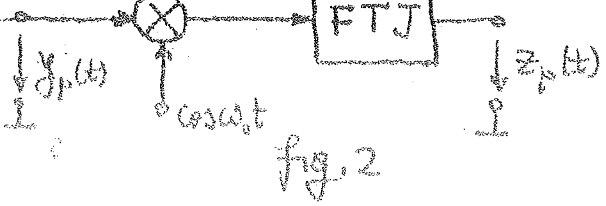
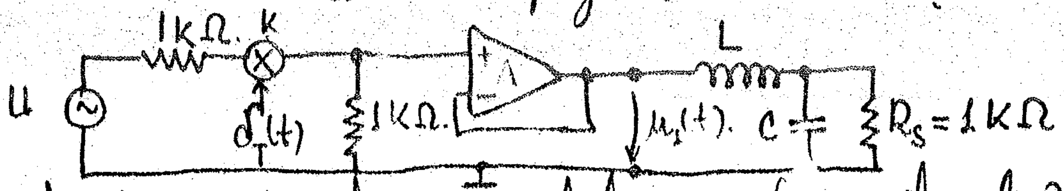


fig. 2

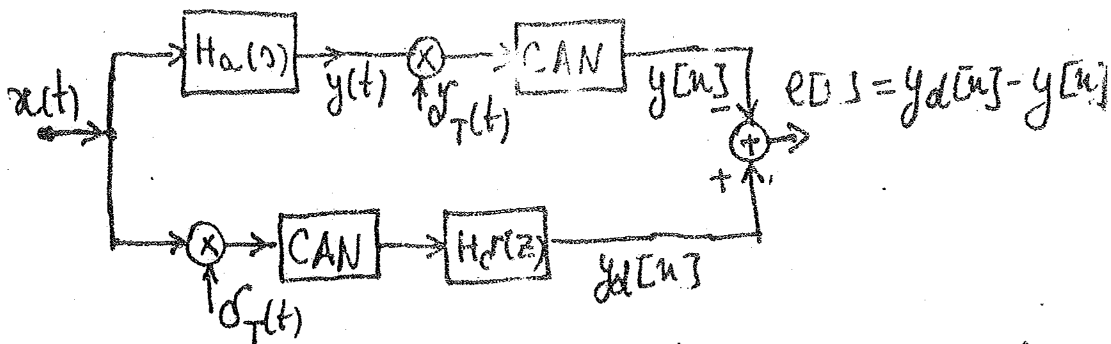
III. Se dă circuitul din figură:



unde tensiunea u este sinusoidală cu frecvența de 2 kHz, T = 100 μs, iar amplificatorul este a.o. ideal.

Să se dimensioneze elementele circuitului LC pentru a obține pe rezistența R_S la frecvența de 2 kHz o componentă sinusoidală micșorată de $\sqrt{2}$ ori față de componenta corespunzătoare a tensiunii $u_1(t)$ iar celelalte componente ale tensiunii de pe R_S să fie micșorate de cel puțin $\sqrt{257}$ de ori comparativ cu componentele de aceeași frecvente ale semnalului $u_1(t)$.

IV. Simularea unui sistem analogic, $H_a(s)$ printr-un sistem numeric, $H_d(z)$ se poate face prin anularea erorii $e[n]$ obținută în momentele de eșantionare (pentru un semnal de intrare dat), după cum rezultă din figură (T=1).



1. Considerând că funcția $H_a(s)$ a sistemului simulat este precizată, stabiliți o modalitate de determinare a funcției $H_d(z)$ pentru sistemul numeric echivalent, astfel încât pentru un semnal $x(t)$ de asemenea precizat, eroarea $e[n]$ să fie nulă (sistemul să fie invariant la acel semnal).

Pentru cazul în care $x(t) = \sigma(t)$ (funcția treaptă unitate) și $H_a(s)$ cunoscut, arătați că

$$H_d(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{H_a(s)}{s} \right\}_{t=nT} \right\}$$

2. Fie $H_a(s) = \frac{1}{s+1}$. Echivalați sistemul printr-un sistem (numeric) $H_{d_1}(z)$, invariant la impulsul unitate $\delta(t)$ și apoi evaluați eroarea $e[n]$ ce apare pentru $n \to \infty$ dacă la intrarea acestui sistem se aplică funcția treaptă unitate $\sigma(t)$.

Echivalați același sistem prin sistemul numeric $H_{d_2}(z)$ astfel încât să obțineți invarianța la funcția treaptă unitate $\sigma(t)$ și evaluați eroarea $e_2[n]$ dacă la intrarea acestui nou sistem se aplică impulsul unitate $\delta(t)$, precizând maximul acestei erori.

secvenţei discrete:

(1p) $a_n = \sin \omega_0 nT$

notată $T_s \geq T$. Avem condiţia:

$$T_s = NT \qquad N \in \mathbb{N} \qquad (\Rightarrow)$$

$(\Rightarrow) \sin \omega_0 NT = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sin 2\pi N \, {}^{T}/_{T_0} = 0$

$\frac{T}{T_0} >> 1 \Rightarrow \frac{T}{T_0} = n + \frac{a}{b}$ unde: $n, a, b \in \mathbb{N}$, $\frac{a}{b} \in [0, 1)$ $(\Rightarrow)$

(1p)

$(\Rightarrow) \; 2\pi N \cdot \frac{a}{b} = 2\pi \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{N}$

condiţia de perioadă fundamentală

Deci:

(0,5p) $\underline{T = T_0 \left(n + \frac{1}{N}\right) \quad n \in \mathbb{N}}$

PROBLEMA 3

Rezolvare

Din oficiu — — — — — — — — — — — — — — — — (0,75)

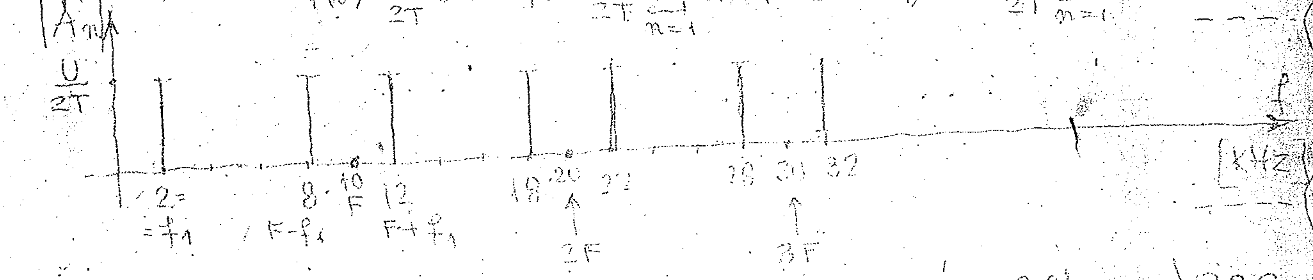
Amplificatorul operațional este montat ca repetor.

Are loc o eșantionare ideală cu $\delta_T(t)$ cu $F=\frac{1}{T}=10KHz$

$$u_1(t)=\frac{1}{2}u(t)\cdot\delta_T(t)=\frac{1}{2}U\sin\omega_1 t\left(\frac{1}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{T}\cos n\Omega t\right) \quad --- (1,0)$$

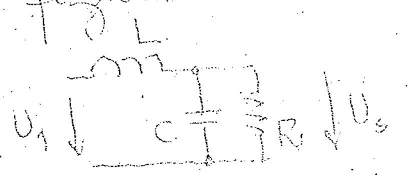
Spectrul semnalului eșantionat este

$$u_1(t)=\frac{U}{2T}\sin\omega_1 t+\frac{U}{2T}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\Omega+\omega_1)t-\frac{U}{2T}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\Omega-\omega_1)t \quad --- (0,5)$$



--- (0,75)

- Funcția de transfer a circuitului (de filtrare) RLC din figură



$$H(s)=\frac{U_s}{U_1}=\frac{1}{s^2LC+s\frac{L}{R}+1}=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+s\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}}=\frac{\omega_0^2}{s^2+s\frac{\omega_0}{Q}+\omega_0^2} \quad --- (1p)$$

unde $\omega_0^2=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, iar deoarece $Q=\frac{R}{\omega_0 L}$ astfel că $\frac{1}{RC}=\frac{1}{Q\omega_0 LC}=\frac{\omega_0^2}{Q\omega_0}=\frac{\omega_0}{Q}$

Rezultă că:

(0,5p) $$|H(j\omega)|^2=\frac{\omega_0^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega_0^2\omega^2}{Q^2}}$$

Condițiile din enunț sunt îndeplinite dacă $|H(j\omega_1)|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ iar $|H(j\omega_2)|=\frac{1}{\sqrt{257}}$ unde $\omega_2=2\pi\cdot 8$

Din cele două condiții impuse rezultă sistemul (1p)

$$\begin{cases}\omega_0^4-2\omega_0^2\omega_1^2+\omega_1^4+\frac{\omega_0^2\omega_1^2}{Q^2}=2\omega_0^4 & \Leftarrow |H(j\omega_1)|^2=\frac{1}{2}\\ \omega_0^4-2\omega_0^2\omega_2^2+\omega_2^4+\frac{\omega_0^2\omega_2^2}{Q^2}=257\omega_0^4 & \Leftarrow |H(j\omega_2)|^2=\frac{1}{257}\end{cases}$$

Normând frecvențele în raport cu ω_0 și notând frecvențele normate cu

$$\eta_1=\frac{\omega_1}{\omega_0} \quad \text{și} \quad \eta_2=\frac{\omega_2}{\omega_0}$$

sistemul de mai sus devine

$$\begin{cases} \eta_1^4 + \eta_1^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right) = 1 \\ \eta_2^4 + \eta_2^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right) = 256 \end{cases}$$

sau, ţinînd cont că $\eta_2 = 4\eta_1$, sistemul devine:

$$\begin{cases} \eta_1^4 + \eta_1^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right) = 1 \\ 256\eta_1^4 + 4\eta_1^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right) = 256 \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} \eta_1^4 + \eta_1^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right) = 1 \\ 64\eta_1^4 + \eta_1^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right) = 64 \end{cases}$$

Scăzînd cele două ecuaţii ale sistemului se obţine

$$63\eta_1^4 = 63 \Rightarrow \eta_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = 1 \quad \text{sau} \quad \omega_1 = \omega_0 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^3$$

iar $Q = 1/\sqrt{2}$

1p

Elementele circuitului (de filtrare) rezultă din condiţiile:

$$\begin{cases} \frac{1}{LC} = \omega_1^2 \\ Q = \frac{1}{\sqrt{2}} = R\omega_1 C \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\omega_1 R} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot 10^3\cdot 10^3} = 56{,}27\,nF \end{cases}$$

0,5p

iar $L = \frac{1}{\omega_1^2 \cdot C} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 56{,}27 \cdot 10^{-9}} = 112{,}54\,mH$

0,5p

Rezolvarea IV
Start (0.75p)

1. Procedura de determinare a funcției $H_d(z)$:
a. Se determină transformatele semnalului de intrare:

$\alpha)$ $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$

$\beta)$ $x[n] = x(nT)$; $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$

b. Semnalul de ieșire a sistemului analogic este:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_a(s) \cdot X(s)\}.$$

c. Se calculează transformata Z a ieșirii $y[n]$:

$$y[n] = y(nT);\ Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\} = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{H_a(s) \cdot X(s)\}\big|_{t=nT}\}$$

d. Se calculează transformata Z a ieșirii $y_d[n]$:

$y_d[n] = h_d[n] * x[n]$; $Y_d(z) = H_d(z) \cdot X(z)$.

e. Pentru ca simularea să se facă fără erori, $e[n] = 0$, este necesar ca $Y(z) = Y_d(z)$. Drept urmare:

$$H_d(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{X(z)} \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{H_a(s) \cdot X(s)\}\big|_{t=nT}\}$$

Procedura (2p)

În cazul particular $x(t) = \sigma(t)$

$X(s) = \mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s}$; $x[n] = \sigma(nT) = \sigma[n]$; $X(z) = \mathcal{Z}\{\sigma[n]\} =$

$$H_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{\frac{H_a(s)}{s}\}\big|_{t=nT}\}$$

Relația (0,5p)

2. Se aplică metoda invarianței răspunsului la impuls unitar:

$$H_{d_1}(z) = \frac{1}{1 - (ez)^{-1}}$$

Relația (0,5p)

Răspunsul acestui sistem la impuls treaptă eșantionat este

$$Yd_1(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-e^{-1}z^{-1})}$$

Relația — — — — — — — — — — — — (0,5p)

$$yd_1[n] = \left\{\frac{e}{e-1} - \frac{1}{e-1}e^{-n}\right\}\sigma[n].$$

Relația — — — — — — — — — — — — 0,5p

Răspunsul sistemului analogic la treapta unitate este:

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = (1-e^{-t})\,\sigma(t)$$

care prin eșantionare face:

$$y_1[n] = (1-e^{-n})\,\sigma[n].$$

Relațiile — — — — — — — — — — — — (0,5p)

Eroarea:

$$e[n] = yd_1[n] - yd_2[n] = \left\{\left(\frac{e}{e-1}-1\right) - \left(\frac{1}{e-1}-1\right)e^{-n}\right\}\sigma[n]$$

Pentru $n \to \infty$, $e[n] \to \frac{1}{e-1}$

Relațiile — — — — — — — — — — — — (0,5p)

Pentru sistemul discret al cărui răspuns este invariant la treapta unitate avem:

$$Hd_2(z) = \frac{z^{-1}(1-e^{-1})}{1-e^{-1}z^{-1}} = (1-e) + (e-1)\frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}$$

Relația — — — — — — — — — — — — (1p) ~~0,5p~~

Răspunsul acestui sistem la impuls unitar este:

$$yd_2[n] = hd_2[n] = (1-e)\,\delta[n] + (e-1)e^{-n}\cdot\sigma[n].$$

Relația — — — — — — — — — — — — (0,5p)

Răspunsul eșantionat al sistemului analogic este:

$$y_2[n] = e^{-n}\cdot\sigma[n].$$

iar eroarea, calculată în acest caz devine:

$e[n] = (e-2)e^{-n}\cdot\sigma[n] - (e-1)\delta[n]$

Relațiile (0,5 p)

Se constată că pentru $n = 0$ avem:

$e[0] = -1$.

iar pentru $n \geq 1$ $\quad e[n] = (e-2)e^{-n} > (e-2)e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$

Valoarea maximă absolută a erorii se obține prin urmare, pentru $n = 0$ și este 1. (0,2