

82

I. Fie $X_1(z)$ transformata z a unui semnal discret $x_1[n]$ definit pentru $n \in [0, N)$ și nul în rest, unde $N \in \mathbb{N}$.

Se cere:

a) Să se calculeze transformata z a semnalului $x_2[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x_1[n-kN]$

b) Sistemului discret, având funcția pondere $h[n] = (\frac{1}{2})^n \delta[n]$ și se aplică excitația $x[n]$ având transformata z

$$X(z) = \frac{4z^4 + 5z^3 + 3z^2 - z - 3}{2(z^4 - 1)}$$

Să se determine expresia răspunsului $y[n]$ și să se reprezinte grafic $y[n]$ pentru $n \in [1987, 1990]$.

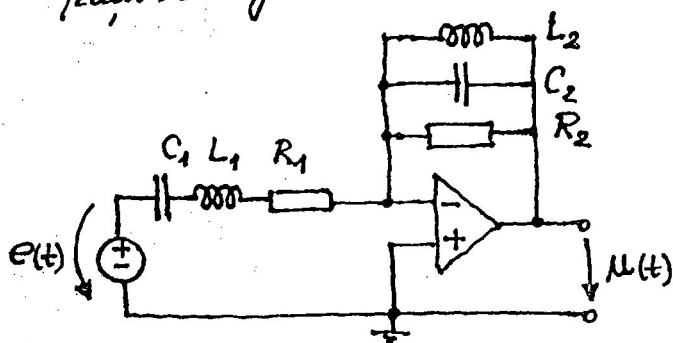
II. Se consideră filtrul trece bandă din figură, amplificatorul operațional fiind ideal. Circuitului i se aplică semnalul

$$e(t) = e_m(t) \cos \omega_c t \text{ unde}$$

$$e_m(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e_g(t - nT), \text{ iar}$$

$$e_g(t) = \tau(t) - \tau(t - \tau), \text{ în care}$$

$$\tau = \frac{T}{2}.$$



a) Să se determine funcția de transfer $H(s) = U(s)/E(s)$ și condiția ca echivalentul de joasă frecvență, de bandă îngustă, să aibă pol dublu real.

b) Să se determine expresia răspunsului $u(t)$ sub formă compactă.

III. Un filtru trece jos are funcția de transfer $H(s)$ rațională, cu coeficienți reali și poli simpli, situați în semiplanul stâng.

Se definește banda echivalentă a filtrului prin relația.

$$B \triangleq \frac{\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega}{H^2(0)}$$

Să se arate că

$$B = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{A_i A_k}{\rho_i + \rho_k}}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\rho_i} \right)^2},$$

în care A_m reprezintă reziduurile în cei N poli, ρ_m , ai funcției $H(s)$.

Hîrtie Concept

Rezolvare Problema 1 (I.P.B.)

a). $X_1(z) \Leftrightarrow x_1[n]$

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_2[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_1[n-kN] z^{-n} \quad 0,5p$$

Notăm $n-kN = m$ rezultă:

$$\begin{aligned} X_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_1[m] z^{-n-kN} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-kN} \sum_{m=0}^{\infty} x_1[m] z^{-m} = \\ &= X_1(z) \sum_{k=0}^{\infty} z^{-kN} = \frac{X_1(z)}{1-z^{-N}} \quad 2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b). Y(z) &= X(z) H(z) = \frac{4z^4 + 5z^3 + 3z^2 - z - 3}{z^4 - 1} \cdot \frac{z-1}{z-1} = \\ &= \frac{z(4z^4 + 5z^3 + 3z^2 - z - 3)}{(z^4 - 1)(z - 1)} \quad 1p \end{aligned}$$

Deci $Y(z)$ a 2 compoz. de rez. tehnice și de rez. fizice.

$$Y(z) = \frac{A}{z-1} + Y_1(z) \quad 0,5p$$

$$A = \frac{z-1}{z} Y(z) \Big|_{z=1} = \frac{4z^4 + 5z^3 + 3z^2 - z - 3}{z^4 - 1} \Big|_{z=1} = \frac{26-58}{-15} = 2 \quad 2p$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_1(z) &= Y(z) - \frac{2}{z-1} = \frac{z(4z^4 + 5z^3 + 3z^2 - z - 3)}{(z^4 - 1)(z - 1)} - \frac{2}{z-1} = \\ &= \frac{z(4z+1)^3}{z^4 - 1} \quad 1p \end{aligned}$$

$$\text{Deci: } Y(z) = \frac{2}{z-1} + \frac{z(4z+1)^3}{z^4 - 1} = \frac{2}{z-1} + \frac{z^4(1+\frac{1}{4})^3}{z^4(1-\frac{1}{z^4})} = \frac{1}{1-\frac{1}{z^4}} +$$

S.C.S. Problema II, Soluție

$$a) \textcircled{1p} H(s) = - \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = - \frac{1}{Z(s) \cdot Y_2(s)} = \frac{-s^2 \frac{1}{L_1 C_2}}{(s^2 + s \frac{R_1}{L_1} + \frac{1}{L_1 C_1}) (s^2 + s \frac{G_2}{C_2} + \frac{1}{L_2 C_2})}$$

Pentru ca echivalentul de j.f. să aibă pol dublu real este necesar ca sistemul să admită o pereche de poli complecși dubli de forma $s = -\alpha \pm j\omega_0$

$$\textcircled{1p} \text{ Se obțin condițiile: } 2\alpha = \frac{R_1}{L_1} = \frac{G_2}{C_2} = \frac{L_2}{C_1}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

b) $\textcircled{1.5p}$ Echivalentul de j.f. este: $H_j(s) = \frac{1}{4L_1 C_2} \cdot \frac{1}{(s+\alpha)^2}$
Se aplică formula lui Weidelich.

$$U_g(s) = E_g(s) \cdot H_j(s) = U_e(s) (1 - e^{-s\tau})$$

$$\textcircled{1p} \text{ unde } E_g(s) \cdot H_j(s) = \frac{1}{4L_1 C_2} \frac{1 - 1}{s(s+\alpha)^2} (1 - e^{-s\tau}) = (1 - e^{-s\tau}) \left(\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{\alpha} \frac{1}{(s+\alpha)^2} \right) \cdot \frac{1}{4L_1 C_2}$$

$$\textcircled{2p} U_e(s) = \text{Res}(-\alpha) \frac{\frac{1}{4L_1 C_2} e^{st}}{s(s+\alpha)^2 (1 + e^{-s\tau})} = \lim_{s \rightarrow -\alpha} \frac{d}{ds} \frac{\frac{1}{4L_1 C_2} e^{st}}{\alpha^2 (1 + e^{-s\tau})} =$$

$$= -\frac{1}{4L_1 C_2} \left[\frac{t e^{-\alpha t}}{-\alpha (1 + e^{\alpha \tau})} - \frac{e^{-\alpha t} (1 + e^{\alpha \tau} + \alpha \tau e^{\alpha \tau})}{\alpha^2 (1 + e^{\alpha \tau})^2} \right]$$

$$\textcircled{2p} U_g(t) = \frac{-1}{4L_1 C_2} \left\{ \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha} t e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha (1 + e^{\alpha \tau})} t e^{-\alpha t} + \frac{1 + e^{\alpha \tau} + \alpha \tau e^{\alpha \tau}}{\alpha^2 (1 + e^{\alpha \tau})^2} e^{-\alpha t} \right) \sigma(t) + \left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha(t-\tau)} + \frac{1}{\alpha} (t-\tau) e^{\alpha(t-\tau)} + \frac{1 + e^{\alpha \tau} + \alpha \tau e^{\alpha \tau}}{\alpha^2 (1 + e^{\alpha \tau})^2} e^{-\alpha(t-\tau)} \right) \sigma(t-\tau) \right\}$$

$$\textcircled{0.5p} u(t) = u_g(t) \cdot \cos \omega_0 t$$

+ 1 pct - bara

$$+ \frac{(1 + \bar{z}^{-1})^3}{1 - \bar{z}^4}$$

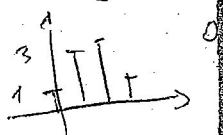
Pe membru drept al ultimei relații recursive

$y_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta[n] + y_2[n]$ unde $y_2[n]$ e un semnal
semiperiodic, de perioadă $N=4$, analog a $x_2[n]$ de la p.

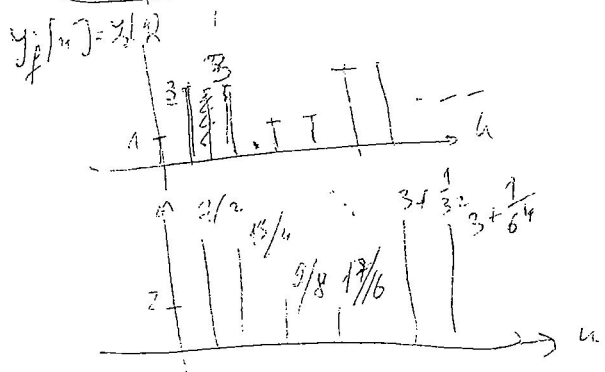
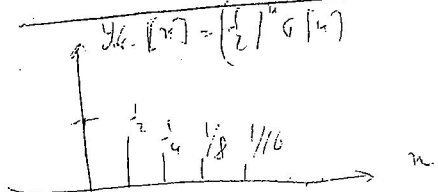
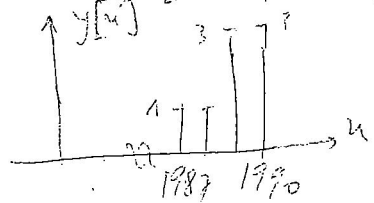
$$\text{Aadar } y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[n-k4] \text{ unde}$$

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ (1 + \bar{z}^{-1})^3 \right\} \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ 1 + 3\bar{z}^{-1} + 3\bar{z}^{-2} + \bar{z}^{-3} \} =$$

$$\delta[n] + 3\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + \delta[n-3]$$



Conștient de faptul că $\left(\frac{1}{2}\right)^n \delta[n]$ dă naștere la o serie de a.c.
pentru $n \in [1987, 1990]$ căutăm doar răsp. de reg. portat.



Hîrtie Concept

Soluție probl. III (I.P.T.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt \quad 1p$$

$$U(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - p_i} \Rightarrow h(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{p_i t} \sigma(t) \quad 1p$$

$$|h(t)|^2 = \left(\sum_{i=1}^N A_i e^{p_i t} \sigma(t) \right) \left(\sum_{m=1}^N \overline{A_m} e^{\overline{p_m} t} \sigma(t) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N A_i \overline{A_m} e^{(p_i + \overline{p_m})t} \sigma(t) \quad 3p$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N A_i \overline{A_m} \int_0^{\infty} e^{(p_i + \overline{p_m})t} dt = - \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{A_i \overline{A_m}}{p_i + \overline{p_m}} \quad 2p$$

Deoarece $U(s)$ are coef. reali, poliile complexe apar în perechi complex conj. și au rez. complexe conj. Prin urmare $\overline{p_m}$ este pol al lui $U(s)$ și fie el p_k . Mai avem $\overline{A_m} = A_k$ și deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{A_i A_k}{p_i + p_k} \quad 1p$$

$$U(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \sum_{i=1}^N A_i \int_0^{\infty} e^{p_i t} dt = - \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{p_i} \in \mathbb{R} \quad 1p$$

Substituind:

$$B = - \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{A_i A_k}{p_i + p_k}}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{p_i} \right)^2}$$

1p
10p

Se consideră circuitul din Fig. 1.

Pentru purpura
de la

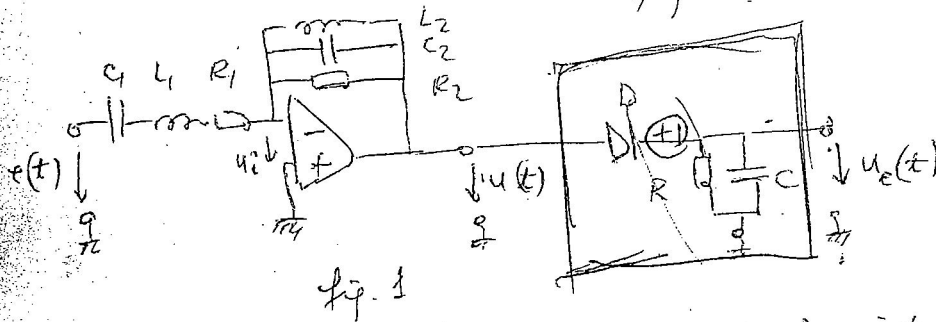


Fig. 1

Amplificatorul operațional și dioda D sunt descrise respectiv de caracteristicile din Fig. 2 și 3.

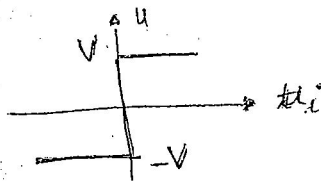
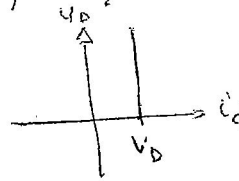


Fig. 2



Circuitul este alimentat de tensiunea $e(t) = e_m(t) \cdot \cos \omega_0 t$ unde $e_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_g(t - nT)$, $e_g(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$, $T = 2T_0$

de care:

- a). Să se determine condițiile în care funcția de transfer

$$H(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \text{ are pol dublu în } s = -\alpha \pm j\omega_0 \text{ și să se b. 3.}$$

- b). Să se determine în condițiile de la punctul a).

răspunsul $u_e(t)$ presupunând $V_D = 0$ și $V = \infty$ idr constant
Rc adaptată astfel încât să poată fi considerată odată.

- c). Să se calculeze valorile minime a lui V_D maximă
a lui V_D astfel ca neliniaritățile să nu influențeze
forma tensiunii $u_e(t)$.

Encl. progress de l'air

$u(z)$ excitat de $f[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} f_g[n - N_M]$. În care

a). Se va determina $y_g[n]$ cu ajutorul căruia se exprimă $y[n]$, răspunsul sistemului; în forma $y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} y_g[n - N_k]$

c) Cas particular: $f_g(u) = \delta(u)$, $h(z) = \frac{z}{z-a}$.

Solution:

$$a) f[n] = \sum_{m=0}^{\infty} f_g[n - Nm] \Leftrightarrow F_g(z) (1 + z^{-N} + z^{-2N} + \dots) = F_g(z) \cdot \frac{1}{1 - z^{-N}}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot \frac{F_g(z)}{1 - z^{-N}} = Y_f(z) + Y_e(z)$$

$$Y_f[n] = \sum_{m=0}^{\infty} f_g[n - Nm] \Leftrightarrow \frac{F_g(z)}{1 - z^{-N}}$$

$$H(z) \cdot \frac{F_g(z)}{1 - z^{-N}} = \frac{F_g(z)}{1 - z^{-N}} + Y_e(z)$$

$$Y_g(z) = H(z) \cdot F_g(z) - Y_e(z) (1 - z^{-N})$$

$$b) F_g(z) = 1; H(z) = \frac{z}{z-a}$$

$$Y_e(z) = \left. \frac{z}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - z^{-N}} \right|_{z=a} = \frac{z}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - a^{-N}}$$

$$Y_g(z) = \frac{z}{z-a} \cdot 1 - \frac{z}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - a^{-N}} \cdot (1 - z^{-N}) =$$

$$= \frac{z}{z-a} \left(1 - \frac{1}{1 - a^{-N}} \right) + \frac{z}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - a^{-N}} z^{-N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1 - a^{-N}} a^N f[n]; & n < N \\ 0 & ; n > N \end{cases}$$

Soluție

$$a) \quad H(s) = \frac{-\alpha^2 \frac{1}{L_1 C_2}}{(s^2 + \alpha \frac{R_1}{L_1} + \frac{1}{L_1 C_1})(s + \alpha \frac{G_2}{C_2} + \frac{1}{L_2 C_2})}$$

$$\frac{\frac{1}{L_1 C_2}}{\left(\frac{R_1}{L_1}\right)^2 + \omega^2} = \frac{\frac{1}{L_1 C_2}}{\sqrt{2} \left(\frac{R_1}{L_1}\right)^2}$$

$$\left(\frac{R_1}{L_1}\right)^2 + \omega^2 = \sqrt{2} \left(\frac{R_1}{L_1}\right)^2 \quad \omega_{2dB} = \frac{R_1}{L_1} \sqrt{2-1} = \frac{1}{2}$$

$$B = 2\omega_{2dB} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \alpha \approx 1,28 \alpha$$

$$2\alpha = \frac{R_1}{L_1} = \frac{G_2}{C_2} = \frac{1}{L_1 C_1} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad ; \quad G_2 = \frac{1}{R_2} \quad ; \quad L_1 C_1 = L_2 C_2$$

b) Echivalentul de j.f. este $H_j(s) = -\frac{1}{L_1 C_2} \cdot \frac{1}{(s+\alpha)^2} \cdot \frac{L_1 C_1}{L_2}$
 Se aplică formula lui Heidebach

$$Y_g(s) = E_g(s) \cdot H_j(s) - Y_e(s) (1 - e^{-sT_0})$$

$$E_g(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s(s+\alpha)^2} (1 - e^{-sT_0}) = (1 - e^{-sT_0}) \left(\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{s+\alpha} \right)$$

$$= -\frac{1}{L_1 C_2} \left[\frac{t e^{-\alpha t}}{\alpha(1+e^{\alpha T_0})} - \frac{e^{-\alpha t} (1+e^{\alpha T_0} + \alpha T_0 e^{\alpha T_0})}{\alpha^2 (1+e^{\alpha T_0})^2} \right]$$

$$Y_e(s) = \text{Res}_{s=-\alpha} \left(-\frac{1}{L_1 C_2} \frac{e^{-sT_0}}{s(s+\alpha)^2 (1+e^{-sT_0})} \right) = \lim_{s \rightarrow -\alpha} \frac{d}{ds} \frac{e^{-sT_0}}{s(1+e^{-sT_0})}$$

$$Y_g(t) = \left\{ \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha} t \cdot e^{-\alpha t} \right) \delta(t) + \left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha(t-T_0)} + \frac{1}{\alpha} (t-T_0) e^{\alpha(t-T_0)} \right) \delta(t-T_0) + \left[\frac{1}{\alpha(1+e^{\alpha T_0})} t e^{-\alpha t} + \frac{1+e^{\alpha T_0} + \alpha T_0 e^{\alpha T_0}}{\alpha^2 (1+e^{\alpha T_0})^2} e^{-\alpha t} \right] \delta(t) - \left[\frac{(t-2T_0)}{\alpha(1+e^{\alpha T_0})} e^{-\alpha(t-2T_0)} + \frac{(1+e^{\alpha T_0} + \alpha T_0 e^{\alpha T_0})}{\alpha^2 (1+e^{\alpha T_0})^2} e^{-\alpha(t-2T_0)} \right] \delta(t-2T_0) \right\} \cdot \frac{(-1)}{L_1 C_2}$$

c) Valoarea maximă a tens. $u_e(t)$ este la $t=T_0$ și are expresia $\frac{1}{L_1 C_2} \cdot \frac{e^{2\alpha T_0} + e^{\alpha T_0} - \alpha T_0 e^{\alpha T_0}}{\alpha^2 (1+e^{\alpha T_0})^2} = A(\alpha, T_0, L_1 C_2)$ iar

val. minimă este la $t=0$ sau $t=2T_0$ și are expresia

$$\frac{1}{L_1 C_2} \cdot \frac{1+e^{\alpha T_0} + \alpha T_0 e^{\alpha T_0}}{\alpha^2 (1+e^{\alpha T_0})^2} = B(\alpha, T_0, L_1 C_2)$$

Condițiile sunt deci

$$V_d \leq B < A \leq V.$$

5)

SCS. Etapa finală 1987

Se consideră un sistem real, causal, cu funcție de transfer $H(j\omega)$ ce are numai poli simpli, s_i , $i = \overline{1, N}$.

$$h(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-s_i t} \sigma(t)$$

Se definește banda sistemului ca fiind

$$B = \frac{\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega}{H^2(0)}$$

Se arată că

$$B = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{A_i A_k}{s_i + s_k}}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s_i} \right)^2}$$

Rezolvare:

Funcția pondere $h(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-s_i t} \sigma(t)$

Funcția de transfer a sistemului

$$H(j\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{j\omega + s_i} = \frac{A}{(j\omega + s_1) \cdots (j\omega + s_N)}$$

Coefficienții A_i din dezvoltarea lui $H(j\omega)$ în fracții simple se determină cu formula: $A_i = \left[(j\omega + s_i) H(j\omega) \right]_{j\omega = -s_i}$ deci înlocuind

pe $j\omega$ cu valoarea polului respectiv, $-s_i$, în produsul $(j\omega + s_i) H(j\omega)$.

Deoarece sistemul este real, funcția $H(j\omega)$ este reală. Sistemul are numai poli simpli, ce pot fi poli reali sau poli complex-conjugati. În cazul a doi poli complex-conjugati, $s_1 = s_2^*$, produsul $(j\omega + s_1)(j\omega + s_2)$ ce apare la numitorul lui $H(j\omega)$ capătă expresia:

$$(j\omega + s_1)(j\omega + s_2) = -\omega^2 + (s_1 + s_2)j\omega + s_1 s_2 = -\omega^2 + |s_1|^2 + j\omega \cdot 2 \operatorname{Re}(s_1) \quad (1)$$

Dacă s_k este un pol real, făcând înlocuirea $j\omega = -s_k$ rezultă că coeficientul A_k este real.

Dacă $s_i = s_j^*$ este o pereche de poli complex-conjugati, coeficienții

A_i, A_j au expresiile:

$$A_i = \left[(j\omega + s_i) H(j\omega) \right]_{j\omega = -s_i}$$

$$A_j = \left[(j\omega + s_j) H(j\omega) \right]_{j\omega = -s_j}$$

Înlocuind $j\omega = -s_i$ respectiv $j\omega = -s_j = -s_i^*$ în produsul de forme

coeficienți A_i, A_j sunt complex conjugate: $A_i^* = A_j^*$

Am arătat că coeficienții A_i din descompunerea funcției $H(pw)$ în fracții simple sînt reali (corespunzători polilor reali) sau complex conjugate (corespunzători polilor complex-conjugate)

Teorema energiei:
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega$$

$$|h(t)|^2 = h(t) h^*(t) = \left[\sum_{i=1}^N A_i e^{-\alpha_i t} \sigma(t) \right] \left[\sum_{k=1}^N A_k^* e^{-\alpha_k^* t} \sigma(t) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N A_i A_k^* e^{-(\alpha_i + \alpha_k^*)t} \sigma(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N A_i A_k e^{-(\alpha_i + \alpha_k)t} \sigma(t)$$

Deci
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N A_i A_k e^{-(\alpha_i + \alpha_k)t} \sigma(t) dt =$$

$$= - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{A_i A_k}{\alpha_i + \alpha_k} e^{-(\alpha_i + \alpha_k)t} \Big|_0^{\infty} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{A_i A_k}{\alpha_i + \alpha_k}$$

Funcția de transfer, $H(j\omega)$, este la Fourier a funcției pondere, $h(t)$:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Deci
$$H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N A_i e^{-\alpha_i t} \sigma(t) dt =$$

$$= - \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\alpha_i} e^{-\alpha_i t} \Big|_0^{\infty} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\alpha_i}$$

$$H^2(0) = \left(\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\alpha_i} \right)^2$$

Deci
$$B = \frac{\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega}{H^2(0)} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{A_i A_k}{\alpha_i + \alpha_k}}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\alpha_i} \right)^2}$$

5) 2. a) Se consideră secvența $e_g[n]$ și se construiesc secvența semiperioadă
 deca $e[n] = \sum_{k=0}^{\infty} e_g[n-kN]$ obținută prin repetarea lui $e_g[n]$ cu
 perioada N . Să se determine răspunsul unui sistem discret cu funcția
 pondere $h[n]$ la secvența de intrare $e[n]$ (Weidlich discret)

b) Un sistem discret este definit prin funcția de transfer

$$H(z) = \frac{4z^4 + 5z^3 + 3z^2 - z - 3}{2(z^4 - 1)}$$

Să se determine răspunsul sistemului la secvența de intrare

$$f[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \tau[n]$$

Rezolvare:

a) Secvența generatoare $e_g[n]$ are transformata Z $E_g(z)$

Teorema deplasării: $e_g[n-kN] \longleftrightarrow z^{-kN} E_g(z)$

Se determină transformata Z a secvenței semiperioadice $e[n]$

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [z^{-kN} E_g(z)] = E_g(z) \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{-kN} \right) = \frac{1}{1-z^{-N}} E_g(z)$$

Sistemul discret are funcția de transfer $H(z)$. Răspunsul său la
 secvența de intrare $e[n]$ conține o parte de regim liber, $y_e[n]$, și
 una de regim forțat $y_f[n]$.

$$y[n] = y_e[n] + y_f[n]$$

$$Y(z) = Y_e(z) + Y_f(z)$$

$$Y(z) = E(z) H(z) = \frac{E_g(z) H(z)}{1-z^{-N}} = \underbrace{\left(\frac{1}{z-p_1} + \frac{1}{z-p_2} + \dots + \frac{1}{z-p_L} \right)}_{\substack{\text{numitori lui } H(z) \\ \text{regim liber}}} \underbrace{\left(\frac{1}{z-p_1} + \dots + \frac{1}{z-p_L} \right)}_{\substack{\text{numitori lui } E(z)}}$$

Pentru determinarea lui $Y_e(z)$ se consideră numai fracțiile
 compensatoare polilor lui $H(z)$. În $Y_e(z)$ trebuie să apară toate
 fracțiile compensatoare numitorului lui $H(z)$ și numai acesta.

Pentru a determina răspunsul forțat, $y_f[n]$, al sistemului la
 secvența de intrare $e[n]$, se scrie

$$y_f[n] = \sum_{k=0}^{\infty} y_g[n-kN]$$

Sei
atunci

$$Y_f(z) = \frac{Y_g(z)}{1 - z^{-N}}$$

$$Y(z) = Y_f(z) + Y_e(z) = \frac{Y_g(z)}{1 - z^{-N}} + Y_e(z) = \frac{E_f(z) H(z)}{1 - z^{-N}}$$

Rezultă: $Y_g(z) = E_f(z) H(z) - (1 - z^{-N}) Y_e(z)$

Se poate determina originalul, $y_g[n]$ și apoi răspunsul forțat în forma compactă: $y_f[n] = \sum_{k=0}^{\infty} y_g[n - kN]$

b)
$$H(z) = \frac{4z^4 + 5z^3 + 3z^2 - z - 3}{2(z^4 - 1)} = \frac{(4z^3 + z^2 + 2z - 3)(z + 1)}{2(z - 1)(z + 1)(z^2 + 1)} =$$

$$= \frac{4z^3 + z^2 + 2z - 3}{2(z - 1)(z^2 + 1)}$$

$$f[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta[n] \iff F(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{2z}{2z - 1}$$

$$Y(z) = F(z) H(z) = \frac{z(4z^3 + z^2 + 2z - 3)}{(z - 1)(2z - 1)(z^2 + 1)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{4z^3 + z^2 + 2z - 3}{(z - 1)(2z - 1)(z^2 + 1)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{2z - 1} + \frac{Cz + D}{z^2 + 1}$$

$$A = \left[(z - 1) \frac{Y(z)}{z} \right] \Big|_{z=1} = \frac{4 + 1 + 2 - 3}{1 \cdot 2} = 2$$

$$B = \left[(2z - 1) \frac{Y(z)}{z} \right] \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{4 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 3}{(-\frac{1}{2})(\frac{1}{4} + 1)} = 2$$

$$jC + D = \left[(z^2 + 1) \frac{Y(z)}{z} \right] \Big|_{z=j} = \frac{-4j - 1 + 2j - 3}{(j - 1)(2j - 1)} = \frac{4 + 2j}{1 + 3j} = \frac{(4 + 2j)(1 - 3j)}{1 + 9} =$$

$$= 1 - j \implies \begin{cases} C = -1 \\ D = 1 \end{cases}$$

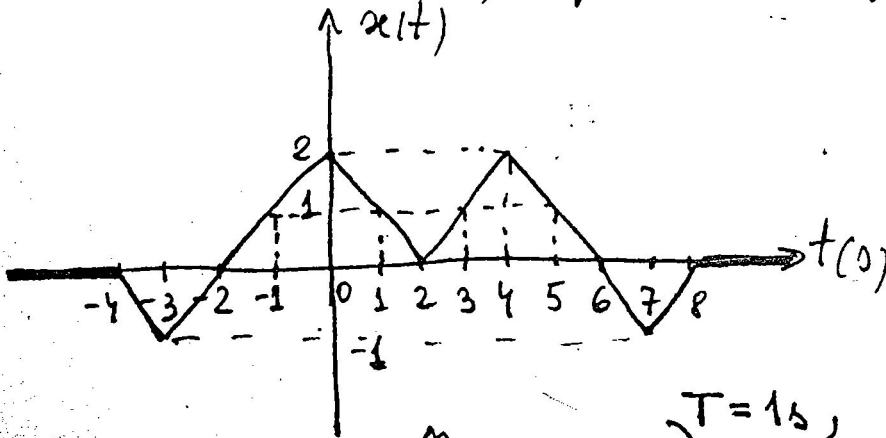
Sei
$$Y(z) = 2 \frac{z}{z - 1} + \frac{2z}{2z - 1} - \frac{z^2}{z^2 + 1} + \frac{z}{z^2 + 1}$$

$$\delta[n] \iff \frac{z}{z - 1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \delta[n] \iff \frac{2z}{2z - 1}$$

1. Se da semnalul $x(t)$ reprezentat în figura:

1586



Notind $y(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, $T=1s$, se cere:

a.) determinarea functiei $\text{Arg}\{Y(\omega)\}$

b.) Reprezentati semnalul $y_1(t) = \tilde{F}^{-1}\{\text{Re}\{Y(\omega)\}\}$

c.) Calculati: $\int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) d\omega$

d.) Calculati: $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dY(\omega)}{d\omega} \right|^2 d\omega$

S-a notat: $Y(\omega) = \tilde{F}\{y(t)\}$

2. Transformata Laplace unilaterală a unui semnal $x(t)$ are expresia $\frac{1}{s(\text{char}-1)}$. Să se stabilească momentele de timp pentru care $x(t) = 1980$. Se consideră $a > 0$.

3. Un sistem format dintr-un circuit cu functia de transfer $H(s) = \frac{\omega_0 s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$, $\alpha > 0$ este urmat de un detector de envelopă ideal. La intrarea sistemului se aplică semnalul $f(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - k\tau) \right] \cos \omega_0 t$ unde:

$$g(t) = \begin{cases} A \cdot e^{-\alpha t}, & t \in (0, t_0), \quad t_0 \gg \frac{2\pi}{\omega_0} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Dacă $\tau > t_0$ să se determine semnalul la iesirea sistemului și valoarea lui τ astfel încât la momentele $t = (t_0/2) + n\tau$, $n \in \mathbb{N}$, acest semnal să fie maxim.

4. Funcția de transfer a unui circuit ale cărui elemente pasive de admitanțe Y_i sînt rezistențe și condensatoare este:

$$H(s) = - \frac{Y_1 Y_2}{Y_2 Y_4 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$$

Se cere să se determine natura elementelor Y_i și condițiile pentru ca circuitul să fie un circuit stabil avînd o pereche de poli complecși și al cărui răspuns la semnalul treaptă unitate $\sigma(t)$ să tindă la -1 cînd $t \rightarrow \infty$.

5. Semnalul $x(t) = x_1(t) + \alpha x_2(t - t_0)$ este un semnal de bandă limitată la $\omega_+ = \frac{\pi}{T}$.

a. Notînd $x[n] = x(nT)$ și $x_1[n] = x_1(nT)$ să se determine funcția $h[n]$ astfel încît:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] h[n-k]$$

pentru $t_0 = T$.

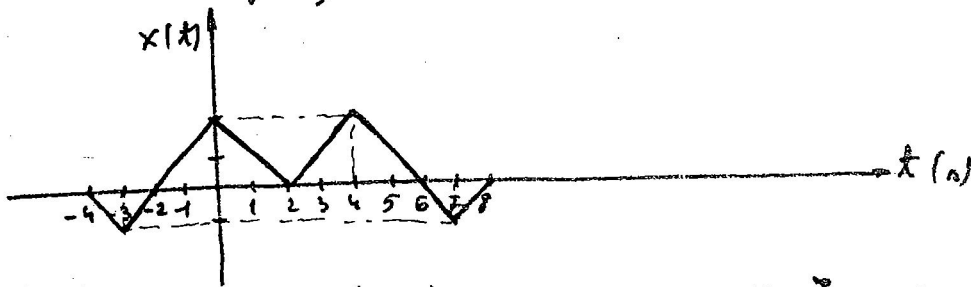
b. Sistemului discret cu funcția pondere $h[n]$ determinat la primul punct i se aplică semnalul

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n].$$

Să se găsească răspunsul ~~discret~~ discret.

(1)

SCS. Etapa finală 1996.

1. Se da funcția $x(t)$:Se construiește funcția $y(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ cu $T = 1(n)$ a) Se va determina $\arg\{Y(\omega)\}$ b) Se va reprezenta $F^{-1}\{Re[Y(\omega)]\}$ c) Se va calcula $\int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) d\omega$ d) Se va calcula $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dY(\omega)}{d\omega} \right|^2 d\omega$ Rezolvare:Avem $y(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = x(t) \cdot d_T(t)$ cu $T = 1$, $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$$Y(\omega) = X(\omega) * \Omega d_\Omega(\omega) = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) d_\Omega(\omega - \tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \tau - n\Omega) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \delta(\omega - \tau - n\Omega) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega)$$

a) Dacă translați $x(t)$ spre stînga cu 2 s obținem o funcție pară: $z(t) = x(t+2)$ este funcție pară, deci transformata ei Fourier este o funcție reală

$$F\{x(t+2)\} = R(\omega)$$

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$x(t+2) \leftrightarrow e^{-j2\omega} X(\omega) = R(\omega)$$

$$X(\omega) = e^{j2\omega} R(\omega)$$

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2(\omega - n\Omega)} R(\omega - n\Omega) = e^{j2\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2n\Omega} R(\omega - n\Omega) =$$

$$= e^{j2\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j4n\pi} R(\omega - n\Omega)$$

$$\text{Deci } \arg\{Y(\omega)\} = 2\omega$$

b) Transformata Fourier a funcției $y(t)$ are o parte reală și una imaginară: $y(t) \rightarrow Y(\omega) = \operatorname{Re}[Y(\omega)] + j \operatorname{Im}[Y(\omega)]$

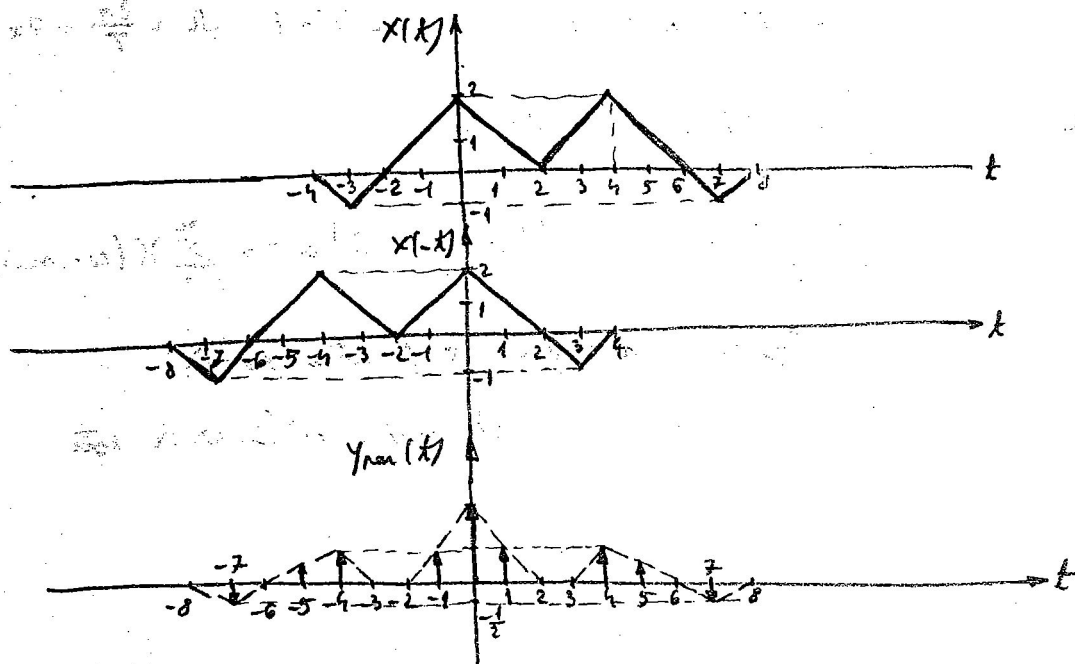
Originalile lui $\operatorname{Re}[Y(\omega)]$ și $j \operatorname{Im}[Y(\omega)]$ sunt funcții:

$$y_{\text{par}}(t) = \frac{y(t) + y(-t)}{2} \rightarrow \operatorname{Re}[Y(\omega)]$$

$$y_{\text{impar}}(t) = \frac{y(t) - y(-t)}{2} \rightarrow j \operatorname{Im}[Y(\omega)]$$

$$\text{Deci } \mathcal{F}^{-1}\{\operatorname{Re}[Y(\omega)]\} = y_{\text{par}}(t)$$

$$\begin{aligned} y_{\text{par}}(t) &= \frac{y(t) + y(-t)}{2} = \frac{1}{2} [x(t) \delta_T(t) + x(-t) \delta_T(-t)] = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \delta_T(t) = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\delta(t+3) + \delta(t+1) + 2\delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-3) + 2\delta(t-4) + \delta(t-5) - \delta(t-7) + \right. \\ &\quad \left. + (-\delta(t+7) + \delta(t+5) + 2\delta(t+4) + \delta(t+3) + \delta(t-1) + 2\delta(t) + \delta(t-1) - \delta(t-3)) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \delta(t+7) + \frac{1}{2} \delta(t+5) + \delta(t+4) + \delta(t+1) + 2\delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-4) + \frac{1}{2} \delta(t-5) - \frac{1}{2} \delta(t-7) \end{aligned}$$



c) Transformata Fourier a semnalului $y(t) = x(t) \cdot \delta_T(t)$ este o funcție periodică în frecvență: $y(t) \leftrightarrow Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega)$

Coefficienții seriei Fourier ai dezvoltării în domeniul frecvență a funcției periodice $Y(\omega)$ sunt proporționali cu eșantioanele luate la intervale $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ ale funcției din domeniul timp, $y(t)$.

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jnT\omega}$$

$$\text{cu } A_n = T y(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Omega}{2}}^{\frac{\Omega}{2}} Y(\omega) e^{jnT\omega} d\omega$$

În cazul nostru $T=4$, $\Omega=2\pi$

②

$$\text{Deci } \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) d\omega = 2\pi y(0) = 2\pi \times 10 = 4\pi$$

d) Conform teoremei energiei pentru o funcție periodică în frecvență, $F(\omega)$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \text{avem} \quad \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |F(\omega)|^2 d\omega = \sum_{-\infty}^{\infty} |A_n|^2$$

$$\text{unde } A_n = T f(nT)$$

$$\begin{aligned} y(t) &\leftrightarrow Y(\omega) \\ -jt y(t) &\leftrightarrow \frac{dY(\omega)}{d\omega} \end{aligned}$$

$$\text{În cazul nostru } T=1, \quad \Omega=2\pi$$

$$\text{Deci } \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dY(\omega)}{d\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |-jn y(n)|^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 y^2(n) =$$

$$= 2\pi (9 + 1 + 1 + 9 + 16 \cdot 4 + 25 + 49) = 2\pi \cdot 158 = 316\pi$$

2. Transformata Laplace unilaterală a semnalului $x(t)$ este

$$X(s) = \frac{1}{s(\cosh as - 1)}$$

Să se determine momentul t pentru care $x(t) = 1980$

$$X(s) = \frac{1}{s(\cosh as - 1)}$$

Rezolvare:

$$\cosh as - 1 = \frac{e^{as} + e^{-as}}{2} - 1 = \frac{e^{as} - 2 + e^{-as}}{2} =$$

$$= \frac{e^{as}}{2} (1 - 2e^{-as} + e^{-2as}) = \frac{e^{as}}{2} (1 - e^{-as})^2$$

$$\frac{1}{s(\cosh as - 1)} = 2 \cdot \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})^2}$$

$$\text{Se observă că } \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{1 - e^{-as}} \right) = - \frac{-(-a) e^{-as}}{(1 - e^{-as})^2} = -a \frac{e^{-as}}{(1 - e^{-as})^2}$$

$$\text{Dacă } f(t) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-as}}$$

$$\text{atunci } t f(t) \longleftrightarrow - \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{1 - e^{-as}} \right) = a \frac{e^{-as}}{(1 - e^{-as})^2}$$

$$\text{Funcția treaptă } y(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$\text{Dacă } \frac{2}{a} t f(t) * y(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s(\cosh as - 1)}$$

$$x(t) = \frac{2}{a} t f(t) * y(t)$$

$$\text{Calculăm transformata inversă a lui } \frac{1}{1 - e^{-as}}$$

$$\text{Știm } \sum_{k=0}^{\infty} q^{-k} = 1 + q^{-1} + q^{-2} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{-(n+1)}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}, \text{ pt } q < 1$$

$$q = e^{-as} < 1 \text{ pentru } a > 0$$

$$\text{Dacă } \frac{1}{1 - e^{-as}} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-as})^k = 1 + e^{-as} + e^{-2as} + \dots + e^{-mas} + \dots$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$\delta(t - ma) \longleftrightarrow e^{-mas} \quad a > 0$$

$$\text{Rezultă că } f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - ka) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-as}}$$

③

$$x(t) = \frac{2}{a} \left[t \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - ka) \right] * y(t) =$$

$$= \frac{2}{a} \int_0^{\infty} \left[\tau \sum_{k=0}^{\infty} \delta(\tau - ka) \right] y(t - \tau) d\tau = \frac{2}{a} \int_0^t \left[\tau \sum_{k=0}^{\infty} \delta(\tau - ka) \right] d\tau =$$

$$= \frac{2}{a} \int_0^t \left[\sum_{k=0}^{\infty} ka \delta(\tau - ka) \right] d\tau = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ ka < |t|}}^{\infty} k$$

$$x(t) = 1980$$

$$2 \sum_{k=0}^n k = 2 \frac{n(n+1)}{2} = 1980$$

$$n^2 + n - 1980 = 0$$

$$\Delta = 1 + 7920 = 7921$$

$$n = \frac{-1 + 89}{2} = 44$$

$$\text{Jadi } t = 44$$

3. Funcția de transfer a unui circuit format din admitanțele Y_i (rezistențe și condensatoare) este:

$$H(s) = - \frac{Y_1 Y_2}{Y_2 Y_4 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$$

Să se determine natura elementelor Y_i știind că sistemul este stabil, are doi poli complex conjugati și răspunsul la $y(t)$ pentru $t \rightarrow \infty$ tinde la -1 .

Rezolvare:

Avem $Y_i = sC_i$ sau $Y_i = G_i$, sistemul fiind format numai din rezistențe și condensatoare. Deoarece n-are o pereche de poli complex conjugati, există cel puțin două condensatoare.

Răspunsul sistemului la funcția treaptă $y(t) \rightarrow \frac{1}{s}$ este

$$Y(s) = \frac{1}{s} H(s) \quad \text{Răspunsul indicat } y(t) \rightarrow Y(s)$$

Conform teoremei valorii finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s Y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = -1$$

Dacă Y_1 și Y_2 ar fi de forma sC_i atunci $\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = 0$,

$$\text{deci } \underline{Y_1 = G_1}, \underline{Y_2 = G_2}$$

Că să existe o pereche de poli complex conjugati trebuie să avem s^2 la numitor. Deoarece $Y_2 = G_2$ trebuie ca $\underline{Y_5 = sC_5}$. Dacă $Y_4 = sC_4$ numitorul rezultă de forma $s(k_1 s + k_2)$ deci nu avem poli complex conjugati. Rezultă $\underline{Y_4 = G_4}$, $\underline{Y_3 = sC_3}$

$$H(s) = - \frac{G_1 G_2}{G_2 G_4 + sC_5 (sC_3 + G_1 + G_2 + G_4)} = - \frac{G_1 G_2}{s^2 C_3 C_5 + s(G_1 + G_2 + G_4)C_5 + G_2 G_4}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = - \frac{G_1 G_2}{G_2 G_4} = -1 \Rightarrow G_1 = G_4$$

$$H(s) = - \frac{G_1 G_2}{s^2 C_3 C_5 + s(2G_1 + G_2)C_5 + G_1 G_2}$$

Trebuie să avem doi poli complex conjugati

$$\Delta = (2G_1 + G_2)^2 C_5^2 - 4G_1 G_2 C_3 C_5 < 0 \quad C_3 > \frac{(2G_1 + G_2)^2}{4G_1 G_2} C_5$$

Pentru ca sistemul să fie stabil, poli trebuie să aibă partea reală negativă, deci

$$(2G_1 + G_2) C_5 > 0$$

4. Se considera semnalul $x(t) = x_1(t) + \alpha x_1(t - t_0)$
 de bandă limitată $\omega_1 = \frac{\pi}{T}$ și se formează secvențele

$$x[n] = x(nT), \quad x_1[n] = x_1(nT)$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] h[n-k] \quad \text{pentru } t_0 = T.$$

a) Să se determine $h[n]$

b) Cu $h[n]$ de la punctul a) considerăm funcția pondere a unui sistem discret, să se determine răspunsul acestui sistem la excitația $\left(\frac{1}{2}\right)^n y[n]$.

Rezolvare:

$x(t)$, $x_1(t)$ sînt de bandă limitată: $X(\omega) = 0$, $X_1(\omega) = 0$ pt $|\omega| > \omega_1$
 Se eșantionează semnalele cu pușcă $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\omega_1$

Se notează cu $x[n] = x(nT)$, $x_1[n] = x_1(nT)$ secvențele de valori care reprezintă eșantioanele semnalelor $x(t)$ și $x_1(t)$. Transformatele Z ale secvențelor sînt:

$$x[n] \rightarrow X(z)$$

$$x_1[n] \rightarrow X_1(z)$$

Secvența $x[n]$ se obține făcînd produsul de convoluție între secvențele $x_1[n]$ și $h[n]$

$$x[n] = x_1[n] * h[n]$$

$$X(z) = X_1(z) H(z)$$

În relația $x(t) = x_1(t) + \alpha x_1(t - T)$ facem $t = nT$ și obținem:

$$x(nT) = x_1(nT) + \alpha x_1((n-1)T)$$

$$x[n] = x_1[n] + \alpha x_1[n-1]$$

$$X(z) = X_1(z) + \alpha z^{-1} X_1(z)$$

Deci $H(z) = \frac{X(z)}{X_1(z)} = 1 + \alpha z^{-1}$

$$h[n] = \delta[n] + \alpha \delta[n-1]$$

5. Fie $g(t) = \begin{cases} A e^{-\alpha t} & \text{pt } t \in (0, t_0) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$

n) $f(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - n\tau) \right] \cos \omega_0 t$ cu $\tau > t_0$

semnalul $f(t)$ se aplică unui sistem $H(\omega) = \frac{\omega_0 \Delta}{\omega^2 + 2\alpha\omega + \omega_0^2}$ care este urmat de un detector de amplitudă ideal $t_0 \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$

Se cere semnalul la ieșirea sistemului în ce condiție trebuie să se aleasă τ a.t. la momentele $\frac{t_0}{2} + n\tau$ semnalul de ieșire să fie maxim.

① a.) Semnalul $z(t) = y(t+2)$ este par, deci transformata sa Fourier $Z(\omega)$ este reală

$$y(t+2) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(\omega) ; Z(\omega) \in \mathbb{R}$$

iar: $y(t+2) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{+2j\omega} Y(\omega) = Z(\omega)$

si: $Y(\omega) = e^{-2j\omega} Z(\omega)$

Prin urmare: $\arg \{ Y(\omega) \} = -2\omega$

b.) Se știe că semnalul par se obține

$$y_{\text{par}}(t) = \frac{y(t) + y(-t)}{2}$$

iar $y_{\text{par}}(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \text{Re} \{ Y(\omega) \} \}$

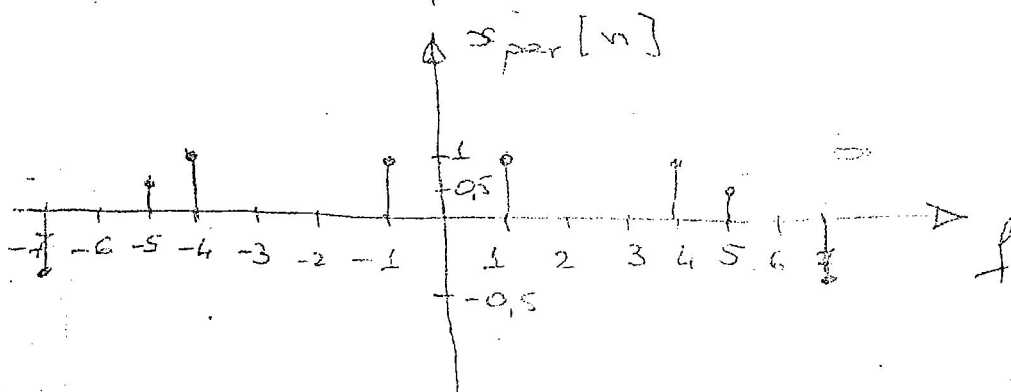
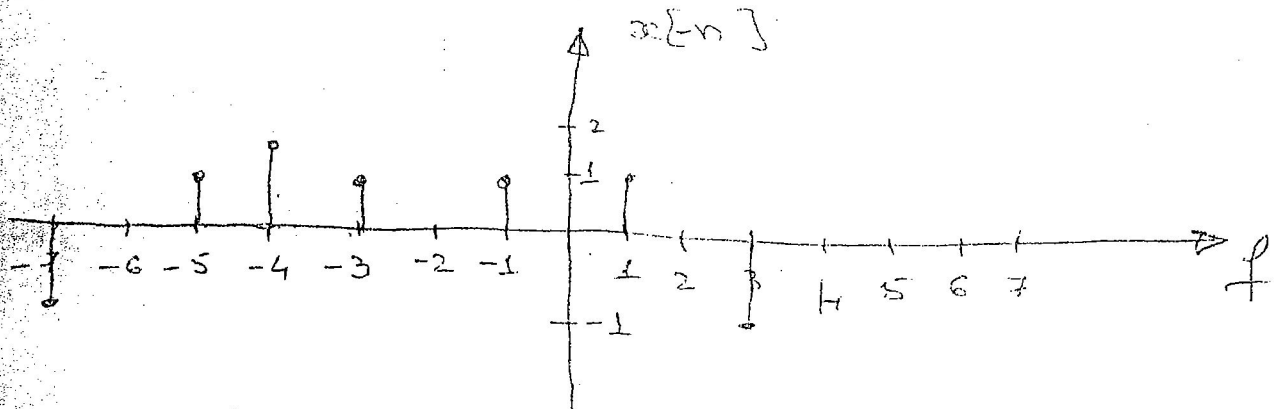
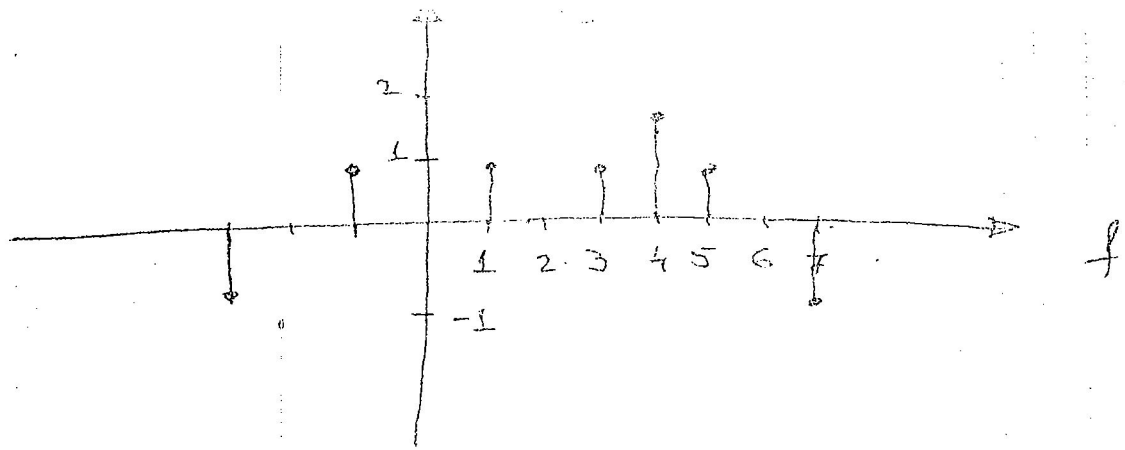
Deci:
$$y_{\text{par}}(t) = \frac{\sum_n x(n) \delta(t-n) + \sum_n x(n) \delta(-t+n)}{2}$$

$$= \frac{\sum_n x(n) \delta(t-n) + \sum_n x(-n) \delta(t-n)}{2}$$

$$= \sum_n \left(\frac{x(n) + x(-n)}{2} \right) \delta(t-n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{\text{par}}(t) = \sum_n x_{\text{par}}(n) \delta(t-n)$$

Funcția $x_{\text{par}}[n]$ este stabilită ca în figură



c.) Se serie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_n x(n) e^{-j\omega n} d\omega =$$

$$= \sum_n x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega n} d\omega = \sum_n x(n) \frac{e^{-j\pi n} - e^{j\pi n}}{-jn} =$$

$$= 2\pi \sum_n x(n) \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} = \begin{cases} 1 & ; n=0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases}$$

Deci: $\int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$

d.) Facem o analogie între caracterul discret al spectrului semnalelor periodice și semnalele esantionate în timp:

Pt. semnalul periodic $z(t)$ scriem:

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (1)$$

El are energia:

$$\frac{L}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |z(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad (2)$$

La semnalul nostru esantionat:

$$y(t) = \sum_n x(n) \delta(t-n)$$

$$Y(\omega) = \sum_n x(n) e^{-j\omega n} \quad (1')$$

Comparând (1) și (1') rezultă analogia:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \omega \\ n &\rightarrow 1 \end{aligned} \quad \text{Deci: } T \rightarrow 2\pi$$

Relația (2) are corespondența:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Y(\omega)|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

Se știe că:

$$\frac{dY(\omega)}{d\omega} e^{-j\omega n} - j\tau \cdot y(t) = -j \sum_n nx(n) \delta(t-n)$$

de unde:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dY(\omega)}{d\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi \sum_n |nx(n)|^2 = 316\pi$$

CONCURS "TUDOR TĂNĂSESCU" 1986

Disciplina "Semnale, circuite și sisteme"

Proba practică

1° Să se redice caracteristica de modulație pentru modulatorul MA ($m = f(u_m)$) folosind măsurători spectrale. Să se verifice prin măsurători pe osciloscop realizarea corectă a gradului de modulație $m = 0,5$.

2° Să se redice caracteristica modulatorului MF ($\Delta f = f(u_m)$) prin măsurători spectrale; se vor utiliza tabelele de funcții Bessel din colecția de probleme de semnale, circuite și sisteme, EDP 1981.

3° Să se stabilească relația care trebuie să existe între indicele de modulație în frecvență, β și gradul de modulație în amplitudină, m , care caracterizează un semnal modulat simultan în amplitudină și frecvență având același semnal modulator, astfel încât să se anuleze componentele de frecvență $f_0 - f_m$. Să se măsoare spectrul de amplitudină al semnalului MA-MF obținut dacă se consideră: a) $m = 0,3$, b) $m = 0,8$

Obs: Semnalele purtător și modulator sînt sinusoidale avînd frecvențele de 500 KHz respectiv 10 KHz. La redicarea caracteristicii se vor utiliza minimum 5 puncte.

m. 85

notor. A.P. Gherman Gheorghe

I.P.T.V. Timisoara

Data finala: SEMNALE

Problema 1

Se considera circuitul din fig. 1.1, in care:

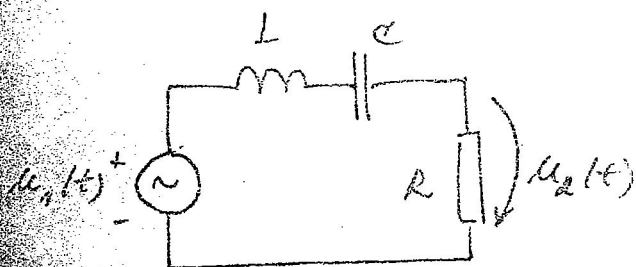


Fig. 1.1

$$u_1(t) = U_0 (1 + m \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_0 t,$$

$$\text{cu } U_0 = 5 \text{ V, } m = 0,6,$$

$$f_m = 4,5 \text{ kHz} \text{ si } f_0 = 450 \text{ kHz}.$$

Inductanta L are valoarea

$$L = 500 \mu\text{H}.$$

1. Sa se stabileasca valoarea factorului de selectivitate Q si a rezistentei R, astfel incat gradul de modulare in amplitudina al tensiunii $u_2(t)$ sa fie $m' = m/\sqrt{2}$.

2. Sa se reprezinte grafic pe aceeași diagramă amvelopele tensiunilor $u_1(t)$ si $u_2(t)$.

3. Sa se calculeze valoarea efectivă U_2 a tensiunii $u_2(t)$ si puterea P disipată de ea pe rezistența R.

1.7 puncte
2.7 puncte

19 + 28,5	47,5
17 + 27,8	44,8
14,3 + 12,5	31,8
14,3 + 15	29,3
14,2 + 9	23,3
14	chiru
13,3	sebutul mihail
12,8	- Timisoara
12,2	- data lui luciu

1.7 puncte	2.4
2.7 puncte	6.6
8. Timp	1.9

Problema nr. 2

Se consideră un circuit liniar și invariant în timp, de tip trece-jos, având funcția de transfer $H(\omega)$, cu proprietatea

$$H(\omega) = 0 \quad \text{pentru } |\omega| > \omega_c$$

Se notează cu $x(t)$ și $y(t)$ semnalele de la intrare, respectiv ieșirea sa.

Se cere:

- a) Să se determine $H(\omega)$, știind că pentru $x(t)$ dat în fig. 2.1, eșantioanele răspunsului, $y[n] = y(nT)$, $T = \frac{\pi}{\omega_c}$, $T > 0$, satisfac condiția:

$$\mathcal{Z}\{y[n]\} = \frac{z+1}{z^2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

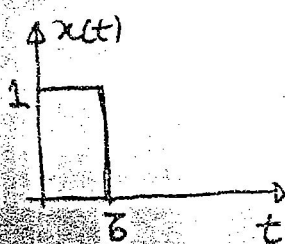


fig. 2.1.

- b) Energia semnalului $y(t)$ în condițiile de la punctul a).

- c) Sistemului având $H(\omega)$ determinat

la punctul a) i se aplică semnalul semiperiodic (peri-odic pentru $t \geq 0$, nul pentru $t < 0$) din fig. 2.2.

Se cere $\mathcal{Z}\{y_1[n]\}$, unde

$y_1(t)$ este răspunsul circuitului la semnalul $x_1(t)$

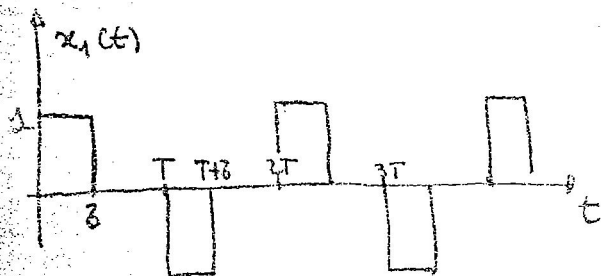


fig. 2.2.

Autor. s. l. Ciocină Silviu

I. P. București

faza finală ; SEMNALE

Problema 3. Se consideră sistemul a cărei schemă bloc este dată în figura 3.1.

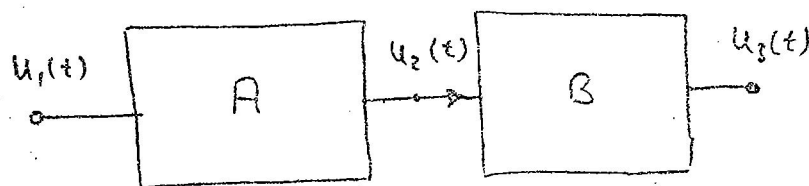


Fig. 3.1.

Blocul A are caracteristica

$$u_2(t) = u_1^3(t)$$

iar blocul B are funcția pondere

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} ; f_c = 750 \text{ Hz}$$

Se cere :

a) Pentru semnalul $u_1(t) = \cos 2\pi \cdot 10^3 t$, aplicat, să se determine și să se reprezinte grafic spectrale de amplitudini ale semnalelor $u_2(t)$ și $u_3(t)$.

b) Semnalul

$$u(t) = \cos \omega_m t \cdot \cos \omega_0 t$$

este aplicat unui redresor monoalternanță ideal. Să se determine și să se reprezinte grafic spectrul de amplitudini al semnalului rezultat.

Se dau : $f_m = 10 \text{ kHz}$; $f_0 = 100 \text{ kHz}$.

Autor. s.l. Dumitriu Heculai

I. P. București

faza finală, SEMNALE

REZOLVARE PROBLEMA 1

① Varianta a

$$I(\omega_0) = \frac{U_0}{R} ; U_{2m}(\omega_0) = U_0$$

$$I(\omega_0 \pm \omega_m) = \frac{m U_0}{2R} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 Q^2}} ; U_{2m}(\omega_0 \pm \omega_m) = \frac{m U_0}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 Q^2}}$$

$$\frac{U_{2m}(\omega_0 \pm \omega_m)}{U_{2m}(\omega_0)} = \frac{m}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 Q^2}} = \frac{m'}{2} = \frac{m}{2\sqrt{2}}$$

Se obține

$$\sqrt{1 + \beta^2 Q^2} = \sqrt{2}, \quad \beta^2 Q^2 = 1, \quad Q = \frac{1}{|\beta|} \quad (\beta_{1,2} = \mp \frac{1}{Q})$$

$$|\beta| = \frac{2f_m}{f_0}$$

$$Q = \frac{f_0}{2f_m} = \frac{450}{2 \cdot 4,5} = 50$$

$$R = \frac{2\pi f_0 L}{Q} = \frac{2\pi \cdot 450 \cdot 10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-6}}{50} = 28,27 \, \Omega$$

Varianta b

Intermit

$$m' = \frac{m}{\sqrt{2}}$$

Reducere la

$$B = \frac{f_0}{Q} = 2f_m$$

$$Q = \frac{f_0}{2f_m} = \frac{450}{2 \cdot 4,5} = 50$$

$$R = \frac{2\pi f_0 L}{Q} = \frac{2\pi \cdot 450 \cdot 10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-6}}{50} = 28,27 \, \Omega$$

② Se notează cu $u_{1K}(t)$ amplituda tensiunii $u_1(t)$ și cu $u_{2K}(t)$ amplituda tensiunii $u_2(t)$

$$u_{1K}(t) = U_0 (1 + m \cos 2\pi f_m t) = U_0 + m U_0 \cos \omega_m t$$

Pentru $u_{2K}(t)$ se scrie

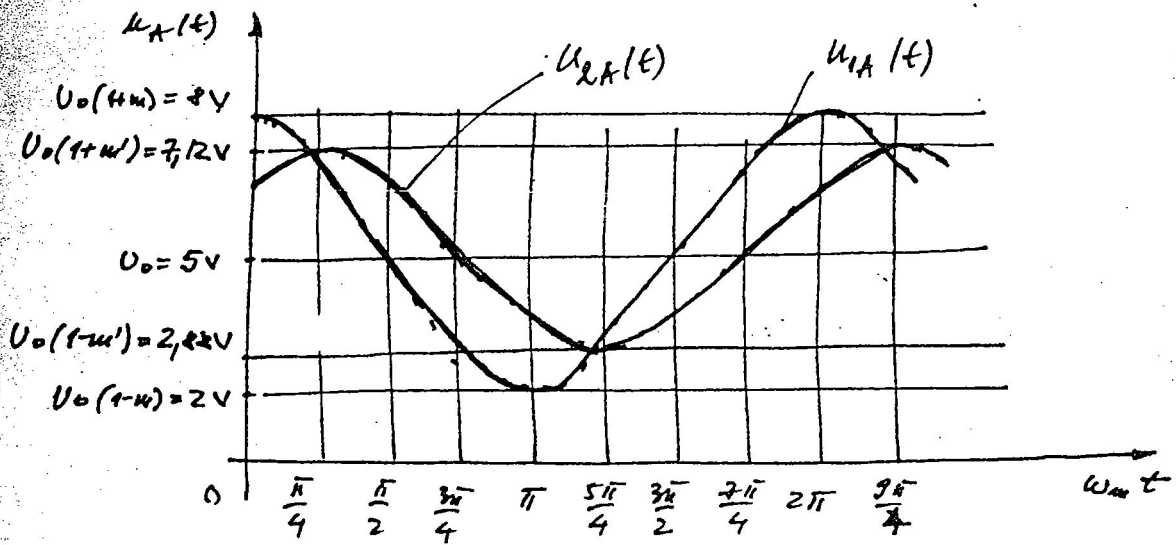
$$\varphi_I(\omega_0 - \omega_m) = -\arctg \beta_1 Q = -\arctg(-1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi_I(\omega_0 + \omega_m) = -\arctg \beta_2 Q = -\arctg(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$u_{2K}(t) = U_0 + \frac{m' U_0}{2} \cos [2\pi (f_0 - f_m) t + \frac{\pi}{4}] + \frac{m' U_0}{2} \cos [2\pi (f_0 + f_m) t - \frac{\pi}{4}] =$$

$$= U_0 + \frac{m' U_0}{2} \sqrt{2} (\sin \omega_m t + \cos \omega_m t) = U_0 + m' U_0 \cos(\omega_m t - \frac{\pi}{4})$$

Diagrama arată că este un sinusoidă



$$③ \quad U_2 = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{0.6^2}{4}} = 3.69 \text{ V}$$

$$P = \frac{U_2^2}{R} = \frac{3.69^2}{28.27} = 0.48 \text{ W}$$

Se consideră un circuit liniar și invariant în timp, de tip trece-jos, având funcția de transfer $H(\omega)$, cu proprietatea $H(\omega) = 0$ pentru $|\omega| > \omega_c$

Se notează cu $x(t)$ și $y(t)$ semnalele de la intrare, respectiv ieșirea sa.

Se cer:

a) Să se determine $H(\omega)$, știind că pentru $x(t)$ dat în fig 2.1, esantioanele răspunsului, $y[m] = y(mT)$, $T = \frac{\pi}{\omega_c}$, $T > 0$, satisfac condiția:

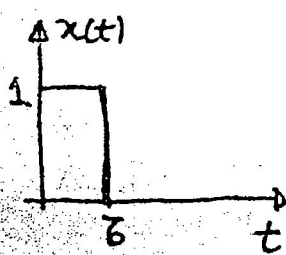


fig 2.1.

$$\mathcal{Z}\{y[m]\} = \frac{z+1}{z^2} \quad m \in \mathbb{Z}$$

b) Energia semnalului $y(t)$ în condițiile de la punctul a).

c) Sistemului având $H(\omega)$ determinat

la punctul a) i se aplică semnalul ~~semn~~ semiperiodic (peri-odic pentru $t \geq 0$, nul pentru $t < 0$) din fig. 2.2.

Se cere $\mathcal{Z}\{y_1[m]\}$, unde

$y_1(t)$ este răspunsul circuitului la semnalul $x_1(t)$.

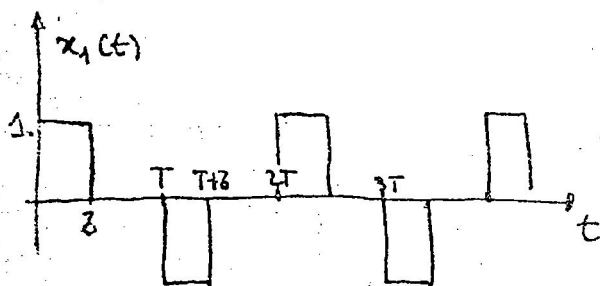


fig 2.2.

Autor. s.l. Ciocină Silviu

I. P. București

faza finală ; SEMNALE

1985

Problema 2

Rezolvare

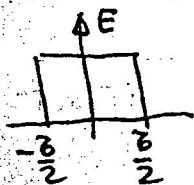
$$y[n] = \delta[n-1] + \delta[n-2].$$

În baza teoremei esanționării:

$$y(t) = \frac{\sin \omega_t(t-T)}{\omega_t(t-T)} + \frac{\sin \omega_t(t-2T)}{\omega_t(t-2T)} = \text{Sa}[\omega_t(t-T)] + \text{Sa}[\omega_t(t-2T)]$$

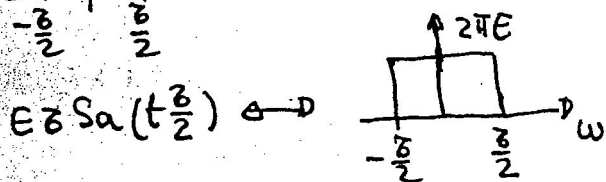
$$Y(\omega) = \mathcal{F} \{ \text{Sa}[\omega_t(t-T)] + \text{Sa}[\omega_t(t-2T)] \}$$

Se știe că:



$$\longleftrightarrow E \text{Sa}(\omega \frac{T}{2})$$

Din teorema simetriei:



Făcând $\frac{T}{2} \rightarrow \omega_t$

$$\text{Sa}(\omega_t t) \longleftrightarrow \frac{\pi}{\omega_t} P_{\omega_t}(\omega)$$

Deci,

$$Y(\omega) = \frac{\pi}{\omega_t} P_{\omega_t}(\omega) [e^{-j\omega T} + e^{j\omega T}]$$

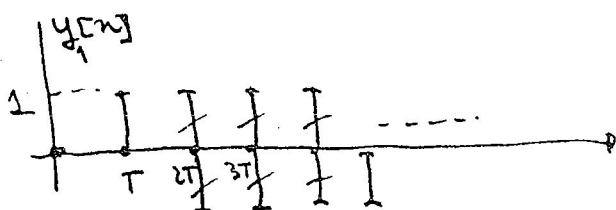
$$X(\omega) = e^{-j\omega \frac{T}{2}} \text{Sa}(\omega \frac{T}{2})$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\pi}{\omega_t} P_{\omega_t}(\omega) \cdot \frac{e^{-j\omega T} + e^{j\omega T}}{\text{Sa}(\omega \frac{T}{2})} \cdot e^{j\omega \frac{T}{2}} = \frac{2\pi}{\omega_t} P_{\omega_t}(\omega) e^{-j\omega (\frac{T}{2} - \frac{T}{2})} \frac{\cos \omega \frac{T}{2}}{\text{Sa}(\omega \frac{T}{2})}$$

$$b) \quad \mathcal{E} = T \sum y^2(nT) = 2T.$$

Obs. Dacă s-a rezolvat punctul a), se poate calcula $\mathcal{E}$ pornind de la $Y(\omega)$ (teorema Parseval).

c) Deoarece sistemul e linear invariant în timp, se poate afla în principiu superpoziției și expresia răspunsului la x(n) din fig. 1. Seria de esanționări este:



$$\text{Deci } \mathcal{Z}\{y(n)\} = z^{-1}.$$

Barem probl 2:

a) - Determine $y[n]$ — 1 pct

~~b)~~ - Serie $y(t) = \text{Sa} \frac{\omega_c(t-T)}{\omega_c(t-T)} + \text{Sa} \frac{\omega_c(t-2T)}{\omega_c(t-2T)}$

- $H(\omega)$

- 3 pct.

- 2 pct.

b)

- 3 pct.

c)

- 2 pct.

10 pct.

②

Problema 3. Se consideră sistemul a cărui schemă bloc este dată în figura 3.1.

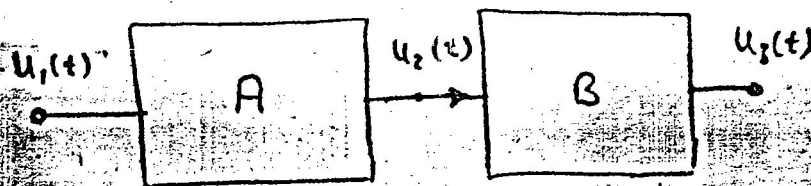


Fig. 3.1.

Blocul A are caracteristica

$$u_2(t) = u_1^3(t)$$

iar blocul B are funcția pondere

$$h(t) = \frac{\sin \omega_t t}{\omega_t t} \quad ; \quad f_t = 750 \text{ Hz}$$

Se cere:

a) Pentru semnalul $u_1(t) = \cos 2\pi \cdot 10^3 t$, aplicat, să se determine și să se reprezinte grafic spectrul de amplitudini ale semnalelor $u_2(t)$ și $u_3(t)$.

b) Semnalul

$$u(t) = \cos \omega_m t \cdot \cos \omega_0 t$$

este aplicat unui redresor monoalternanță ideal. Să se determine și să se reprezinte grafic spectrul de amplitudini al semnalului rezultat.

Se dau : $f_m = 10 \text{ kHz}$; $f_0 = 100 \text{ kHz}$.

Autor. ș.l. Dumitriu Heculai

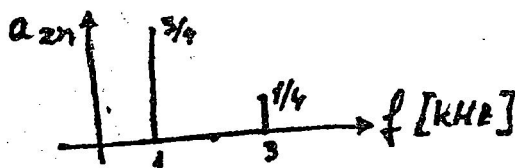
I. P. București

faza finală, SEMNALE

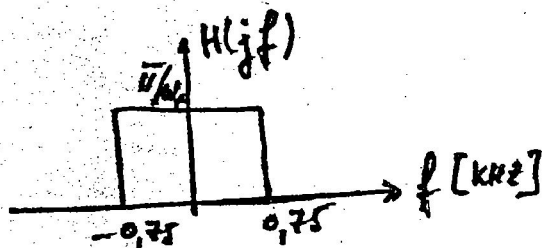
1985

Problema 3 - Rezolvare

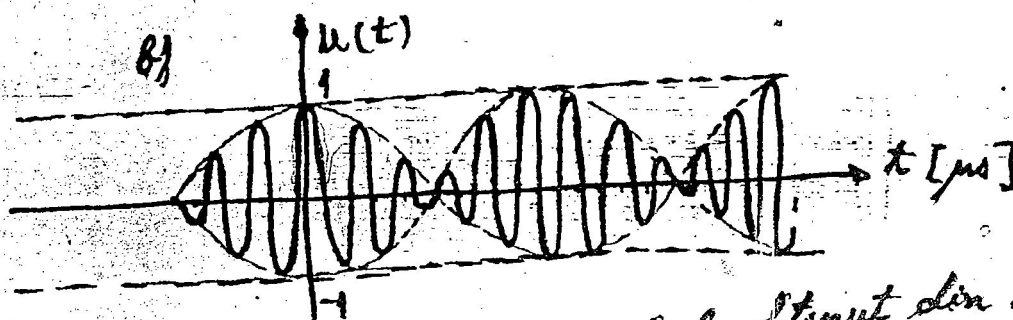
a) $u_2 = \cos^3 \omega_1 t = \frac{3}{4} \cos \omega_1 t + \frac{1}{4} \cos 3 \omega_1 t$ cu $f_1 = 1 \text{ kHz}$



$$h(t) = \frac{\sin \omega_t t}{\omega_t t} \Rightarrow H(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_t} & \text{pt } |\omega| \leq \omega_t \\ 0 & \text{pt } |\omega| > \omega_t \end{cases}$$



Componentele lui $u_2(t)$ sînt plasate în banda de oprire a FTJ $\Rightarrow u_3(t) = 0$



Notînd cu $y(t)$ semnalul obținut din $u(t)$ prin redresare monoalternantă, și cu y_{dr} semnalul obținut din $u(t)$ prin redresare dublă alternantă, se poate scrie

$$\begin{aligned} y_{dr} + u(t) &= 2y(t) \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{1}{2} u(t) + \frac{1}{2} y_{dr} = \frac{1}{2} u(t) + \frac{1}{2} |\cos \omega_m t \cdot \cos \omega_0 t| \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Șar: } |\cos \omega_m t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n^2-1} \cos 2n\omega_m t \quad (2)$$

$$|\cos \omega_0 t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{4k^2-1} \cos 2k\omega_0 t \quad (3)$$

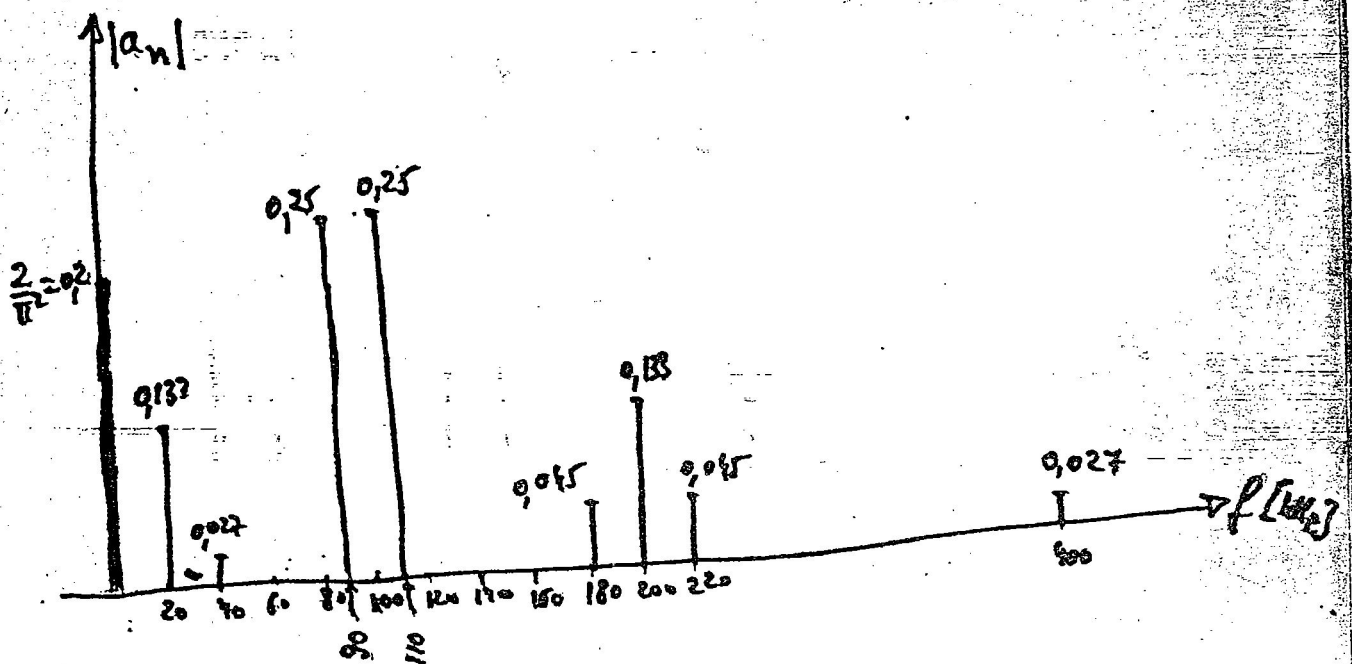
Introducînd (2), (3) în (1) se obține:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4} \cos(\omega_0 + \omega_m)t + \frac{1}{4} \cos(\omega_0 - \omega_m)t + \\ &+ \frac{2}{\pi^2} \left\{ 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n^2-1} \cos 2n\omega_m t - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos 2k\omega_0 t + \right. \\ &\left. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \frac{1}{(4n^2-1)(4k^2-1)} [\cos(2k\omega_0 + 2n\omega_m)t + \cos(2k\omega_0 - 2n\omega_m)t] \right\} \end{aligned}$$

Se observă că $y(t)$ nu conține semnalul modulator ($\cos \omega_m t$), deci demodularea prin redresare nu poate fi utilizată la semnalele MA cu purtător suprimat (anvelopa obținută nu reproduce forma semnalului modulator).

Observând că coeficientul este proporțional cu $\frac{1}{4k^2}$, rezultă că din punct de vedere practic dezvoltarea ④ se poate trunchia la $n=2, k=2$ în sumele simple și $n=1, k=1$ în suma dublă, astfel încât:

$$y(t) \approx 0,25 \cos(\omega_0 + \omega_m)t + 0,25 \cos(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} \cos 2\omega_m t - \frac{1}{15} \cos 4\omega_m t + \frac{1}{3} \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{15} \cos 2\omega_0 t + \frac{1}{9} \cos(2\omega_0 + 2\omega_m)t + \frac{1}{9} \cos(2\omega_0 - 2\omega_m)t \right] + \frac{2}{\pi^2}$$

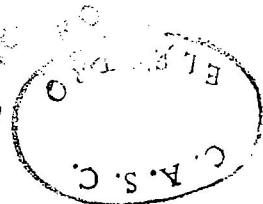


12 1986

1986
12
1986

1. a) se consideră filtrul digital nerecursiv definit de funcția de transfer.

$$H(z) = \sum_{n=-N}^N a_n \cdot z^{-n}$$



și filtrul analogic definit de $H_a(s)$

se dorește ca filtrul digital să simuleze răspunsul în frecvență al filtrului analogic astfel încât la frecvențele $n\omega_0$ pentru $(|n| \leq N)$ cele două răspunsuri în frecvență să fie strict identice.

$$\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{N_0} ; N_0 = 2N+1.$$

Să se determine funcția pondere a filtrului digital causal derivat din $H(z)$. Să se comenteze rezultatul și să se simuleze filtrul astfel obținut.

b) să se găsească condiția ca un filtru cu

$$H(z) = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k \cdot z^{-k}$$

a) să aibă fază linear variabilă

b) să aibă fază 0.

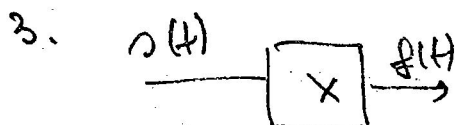
Să se găsească legătura între cele două tipuri de funcții de transfer.

Să se arate că

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left[\frac{(n-1) \pi \cdot M_2}{T} \right] \text{sinc} \left[\frac{n \pi \epsilon}{T} \right] = \frac{T}{M_2} \text{sinc} \left[\frac{n \pi \epsilon}{T} \right]$$

b) Să se arate că

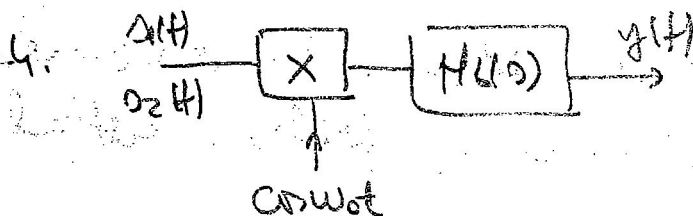
$$\sum_{n=-N}^N \frac{\text{sinc} \frac{\omega_0 t}{\pi}}{\pi t} \approx \frac{\text{sinc} \frac{\omega_0 t}{\pi}}{\pi t}$$



- a) să se determine spectrul lui $f(t)$
 b) să se discute posibilitatea de a-
 țea lui $s(t)$ din $f(t)$

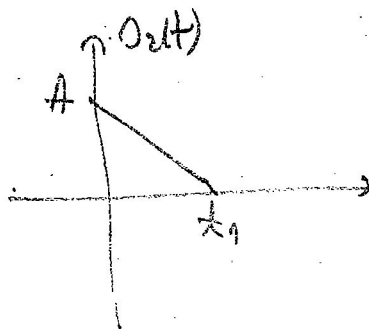
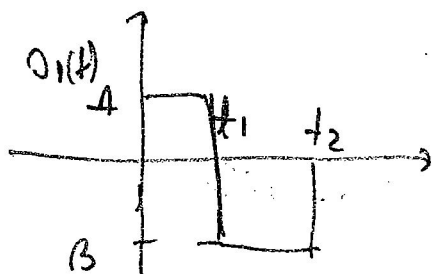
1. $\cos \omega_0 t$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$



$$\alpha \ll \omega_0$$

$$H(s) = \frac{2\alpha s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$



Să se det cond ca rasp $y(t)$ la semnalele A_1 și A_2
 să fie același pentru $t > t_2$

5. Se consideră semnalul $s(t)$ de bandă limitată B în
 frecvență (să se ...)

$|s(H)| \leq (B \cdot E)^{1/2}$, unde B este energia lui $s(t)$

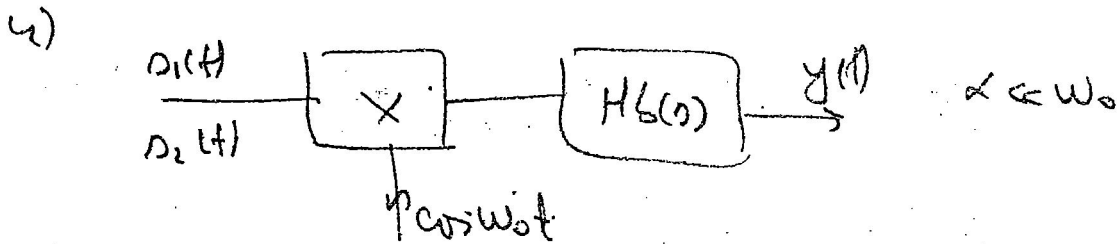
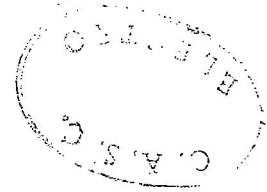
b) să se arate că $|s^{(n)}(H)| \leq T \cdot \sqrt{\frac{B^{2n+1} \cdot E}{2n+1}}$

c) să se evalueze eroarea

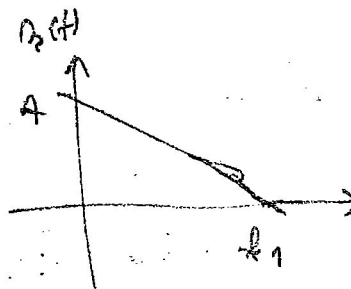
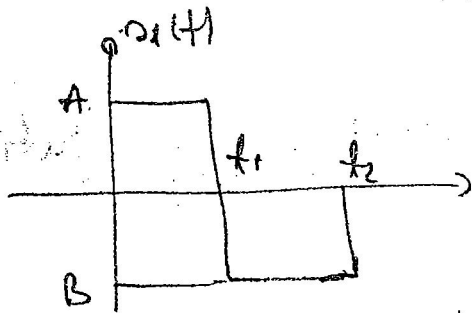
$-s(\frac{n+1}{2}T) - s(nT)$ în cazul eșantionării lui $s(t)$

pentru $T = \frac{1}{2B}$

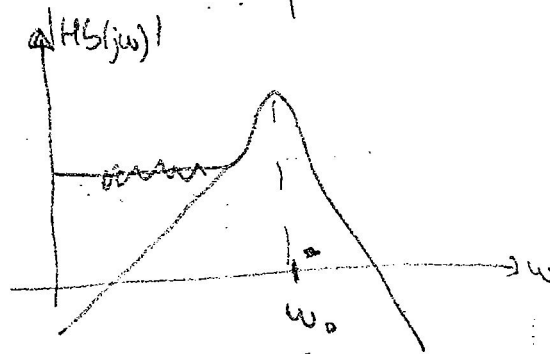
$$\frac{d^2 s}{dt^2} \leq \frac{B}{T}$$



$$H_b(s) \approx \frac{2\alpha s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$



$H_b(s)$



$$s_1(t) = A \cdot G(t) + (A+B) \cdot G(t-t_1) + B \cdot G(t-t_2)$$

~~S1(t)~~

~~A(t)~~

~~S2(t)~~

$$f(t) \rightarrow F(\omega)$$

$$f(t-t_0) \rightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

$$S_1(\omega) = A \left(\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} \right) + (A+B) e^{-j\omega t_1} \left(\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} \right) + B e^{-j\omega t_2} \left(\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} \right)$$

$$S_1(\omega) = \left(\sqrt{f(\omega)} + \frac{1}{j\omega} \right) (A + B e^{-j\omega t_2} - (A+B) e^{-j\omega t_1})$$

$$\text{Fie } s_1(t) = s(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$S_1'(\omega) = \left(\sqrt{f(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} \right) (A + B e^{-j(\omega - \omega_0)t_2} - (A+B) e^{-j\omega t_1})$$

$$S(\omega) = \frac{A}{s} - (A+B) \frac{e^{-st_1}}{s} + \frac{B e^{-st_2}}{s}$$

$$= \frac{1}{s} (A - (A+B) e^{-st_1} + B e^{-st_2})$$

$$\text{Fie } s_1(t) = s(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$S_1(\omega) =$$

$$S_1(\omega) = \left(\sqrt{f(\omega)} + \frac{1}{j\omega} \right) (A + B e^{-j\omega t_2} - (A+B) e^{-j\omega t_1})$$

$$\text{Fie } s_1(t) = s(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$S_1'(\omega) = \left(\sqrt{f(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} \right) (A + B e^{-j(\omega - \omega_0)t_2} - (A+B) e^{-j(\omega - \omega_0)t_1})$$

$$s_1(t) = e^{+j\omega_0 t} (A \sigma(t) - (A+B) \sigma(t-t_1) + B \sigma(t-t_2))$$

$$S_1(s) = \frac{A}{s - j\omega_0} - \frac{(A+B) e^{-t_1(s - j\omega_0)}}{s - j\omega_0} + \frac{B e^{-t_2(s - j\omega_0)}}{s - j\omega_0}$$

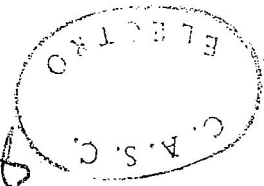
$$= \frac{1}{s - j\omega_0} (A - (A+B) e^{-t_1(s - j\omega_0)} + B e^{-t_2(s - j\omega_0)})$$

$$s_1(t) = A \sigma(t) - (A+B) \sigma(t-t_1) + B \sigma(t-t_2)$$

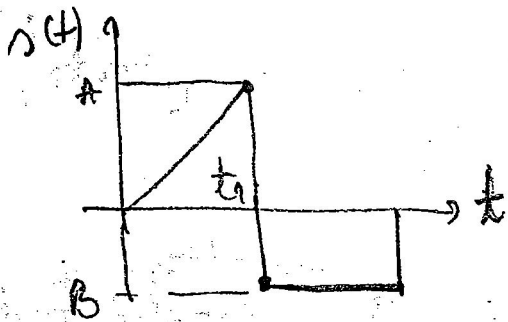
Suprapunem $s_1(t)$ cu $s_2(t)$ și

punem condiția că răspunsul

la $s_1(t) - s_2(t)$ să fie 0 pentru $t > t_2$



~~$$s_1(t) = \left\{ \begin{aligned} &A - A \left(-\frac{t}{t_1} + 1 \right) \quad t \in (0, t_1) \\ &+ B - A \left(-\frac{t}{t_1} + 1 \right) \quad t \in (t_1, t_2) \\ &+ B + A \frac{t}{t_1} - A \quad t \in (t_2, \infty) \end{aligned} \right.$$~~



$$s(t) = \frac{tA}{t_1} (\sigma(t) - \sigma(t-t_1)) + B (\sigma(t-t_1) - \sigma(t-t_2))$$

$$\mathcal{L}(s(t)) = \frac{A}{t_1} \left(\frac{1}{s^2} - e^{-st_1} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right) \right) + B \frac{e^{-st_1}}{s} - B \frac{e^{-st_2}}{s}$$

$$\frac{t}{t_1} \sigma(t-t_1) = \frac{t-t_1}{t_1} \sigma(t-t_1) + \sigma(t-t_1) =$$

$$= \frac{1}{s^2} e^{-st_1} + \frac{1}{s} e^{-st_1} = e^{-st_1} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

$$S(s) = \frac{A}{t_1} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{A}{t_1} e^{-st_1} \frac{1}{s^2} - \frac{A}{t_1} e^{-st_1} \frac{1}{s} + B \frac{e^{-st_1}}{s} - B \frac{e^{-st_2}}{s}$$

$$= \frac{1}{s^2} \left(\frac{A}{t_1} - \frac{A}{t_1} e^{-st_1} \right) + \frac{1}{s} \left((B - \frac{A}{t_1}) e^{-st_1} - B e^{-st_2} \right)$$

Pentru $s'(t) = s(t)$ considerăm

$$s'(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{A}{t_1} - \frac{A}{t_1} e^{-st_1} \right) + \left((B - \frac{A}{t_1}) e^{-st_1} - B e^{-st_2} \right)$$

Felbaur ia numer prezentat din jurul lui 0

Deci

$$S'(s) = \frac{1}{2} S(s - j\omega_0)$$

$$S(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s - j\omega_0)^2} \frac{A}{T_1} (1 - e^{-(s - j\omega_0)t_1}) + \frac{1}{(s - j\omega_0)} \left(\left(B - \frac{A}{T_1} \right) e^{-(s - j\omega_0)t_1} - B e^{-(s - j\omega_0)t_2} \right) \right)$$

$$S(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s - j\omega_0)^2} \frac{A}{T_1} - e^{j\omega_0 t_1} \frac{1}{(s - j\omega_0)^2} \frac{A}{T_1} e^{-st_1} + \frac{1}{(s - j\omega_0)} \left(B - \frac{A}{T_1} \right) e^{j\omega_0 t_1} e^{-st_1} - \frac{1}{s - j\omega_0} B e^{-st_2} e^{j\omega_0 t_2} \right)$$

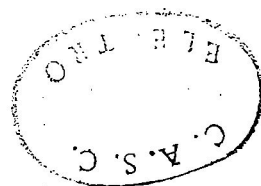
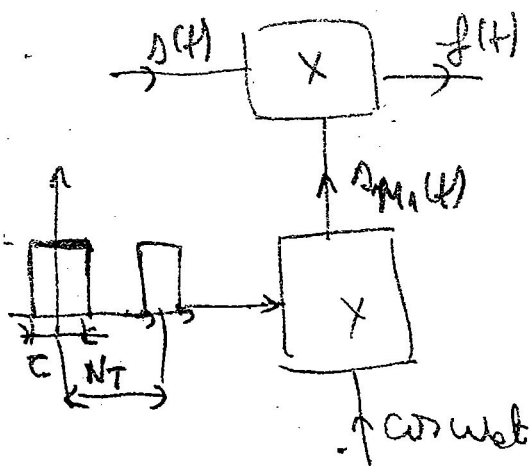
$$s(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{A}{T_1} t e^{j\omega_0 t} \sigma(t) - e^{j\omega_0 t_1} (t - t_1) e^{j\omega_0 (t - t_1)} \sigma(t - t_1) \cdot \frac{A}{T_1} + \left(B - \frac{A}{T_1} \right) e^{j\omega_0 t_1} e^{j\omega_0 (t - t_1)} \sigma(t - t_1) - B e^{j\omega_0 t_2} e^{j\omega_0 (t - t_2)} \sigma(t - t_2) \right]$$

Conditia or fi

$$\frac{A}{T_1} t e^{j\omega_0 t} \sigma(t) - e^{j\omega_0 t_1} (t - t_1) e^{j\omega_0 (t - t_1)} \sigma(t - t_1) \cdot \frac{A}{T_1} +$$

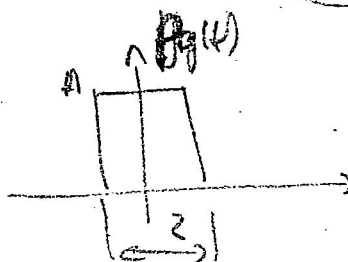
$$+ \left(B - \frac{A}{T_1} \right) e^{j\omega_0 t_1} e^{j\omega_0 (t - t_1)} \sigma(t - t_1) - B e^{j\omega_0 t_2} e^{j\omega_0 (t - t_2)} \sigma(t - t_2) = 0$$

pentru $t > t_2$



Consider a

$$p_g(t) =$$



$$p_g(t) \longleftrightarrow \frac{2A}{\omega} \sin \omega \cdot \frac{T}{2} = P_g(\omega)$$

$$P_i(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_g(t - nNT) \longleftrightarrow P_i(\omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2A \sin n\Omega \frac{T}{2}}{n\Omega}$$

$$\delta(\omega - n\Omega) \quad \text{where } \Omega = \frac{2\pi}{NT}$$

$$F(\cos \omega_0 t) = \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2\pi} \delta(\omega + \omega_0)$$

$$S_M(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\cos \omega_0 t) * P_i(\omega)$$

$$S_M(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \delta(\Omega - \omega_0) + \frac{1}{2\pi} \delta(\Omega + \omega_0) \right] \Omega \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2A \sin n\Omega \frac{T}{2}}{n\Omega} d\Omega$$

$$\delta(\omega - \Omega - n\Omega) d\Omega$$

$$= \frac{2A}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \delta(\omega - n\Omega - \omega_0) \frac{2A \sin n\Omega \frac{T}{2}}{n\Omega}$$

$$= A \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega - \omega_0) \sin n\Omega \frac{T}{2}$$

$$S_{M1}(\omega) = A \sum_{-\infty}^{\infty} f(\omega - n\Omega - \omega_0) \frac{\sin n\Omega \frac{\tau}{2}}{n} +$$

$$+ A \sum_{-\infty}^{\infty} f(\omega - n\Omega + \omega_0) \frac{\sin n\Omega \frac{\tau}{2}}{n}$$

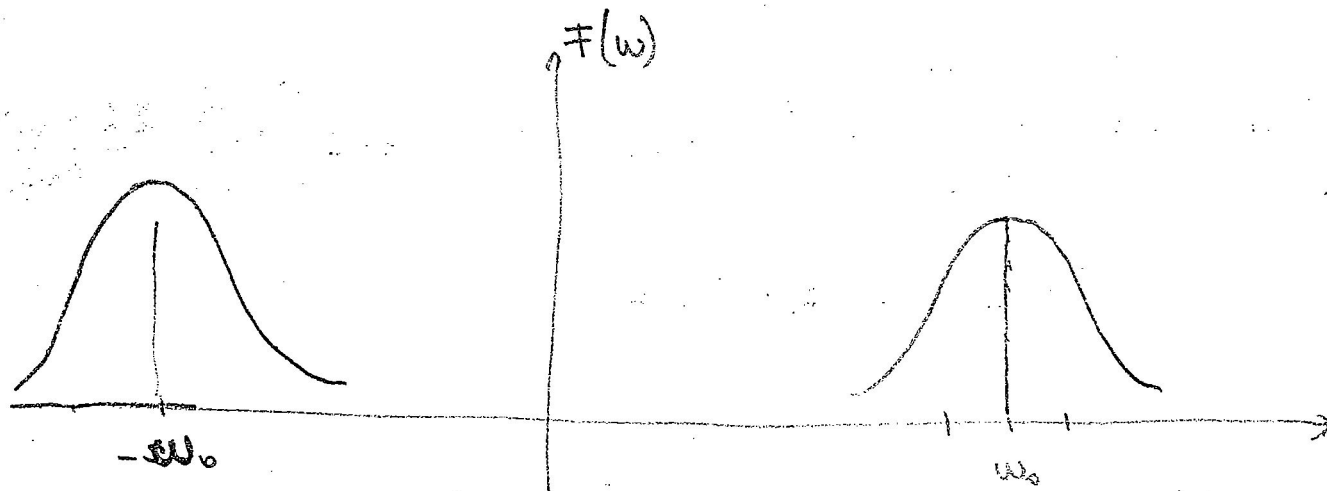
$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} S_M(\omega) * S_{M1}(\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} S_M(\omega) * (S_{M1A}(\omega) + S_{M1B}(\omega))$$

$$\frac{1}{2\pi} S_M(\omega) * S_{M1A}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_M(\tau) \cdot A \sum_{-\infty}^{\infty} f(\omega - n\Omega - \omega_0 + \tau) \frac{\sin n\Omega \frac{\tau}{2}}{n} d\tau$$

$$= \frac{A}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} S_M(\omega - n\Omega - \omega_0) \frac{\sin n\Omega \frac{\tau}{2}}{n}$$

$$F(\omega) = \frac{A}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (S_M(\omega - n\Omega - \omega_0) + S_M(\omega - n\Omega + \omega_0)) \frac{\sin n\Omega \frac{\tau}{2}}{n}$$



$$\frac{\sin n\Omega \frac{\tau}{2}}{n} = \frac{\sin n \frac{2\pi}{NT} \frac{\tau}{2}}{n} = \frac{\sin \frac{2\pi n \tau}{NT}}{n}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{NT} \cdot N \cdot \omega_0$$

$$\frac{\sin \frac{2\pi n}{N \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}}}{n} = \frac{\sin \frac{2\pi n \omega_0}{2N}}{n} = \frac{2\omega_0}{2N} \frac{\sin \frac{2\pi n \omega_0}{2N}}{\frac{2\pi n \omega_0}{2N}}$$

$$\omega - n\omega - \omega_0 = \omega - n \frac{2\pi}{N \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}} = \omega - n \cdot \frac{\omega_0}{N}$$

$$F(\omega) = \frac{A}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\sin \left(\omega - n \frac{\omega_0}{N} - \omega_0 \right) + \sin \left(\omega - n \frac{\omega_0}{N} + \omega_0 \right) \right)$$

$$\frac{\omega_0}{N} \frac{\sin \frac{n \omega_0}{N}}{\frac{n \omega_0}{N}}$$

Deci $\omega_0 = K \cdot N \cdot \pi$, $K \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\sin \frac{n \omega_0}{N}}{n} = 0 \quad \forall n \neq 1$$

$F(\omega)$ va fi

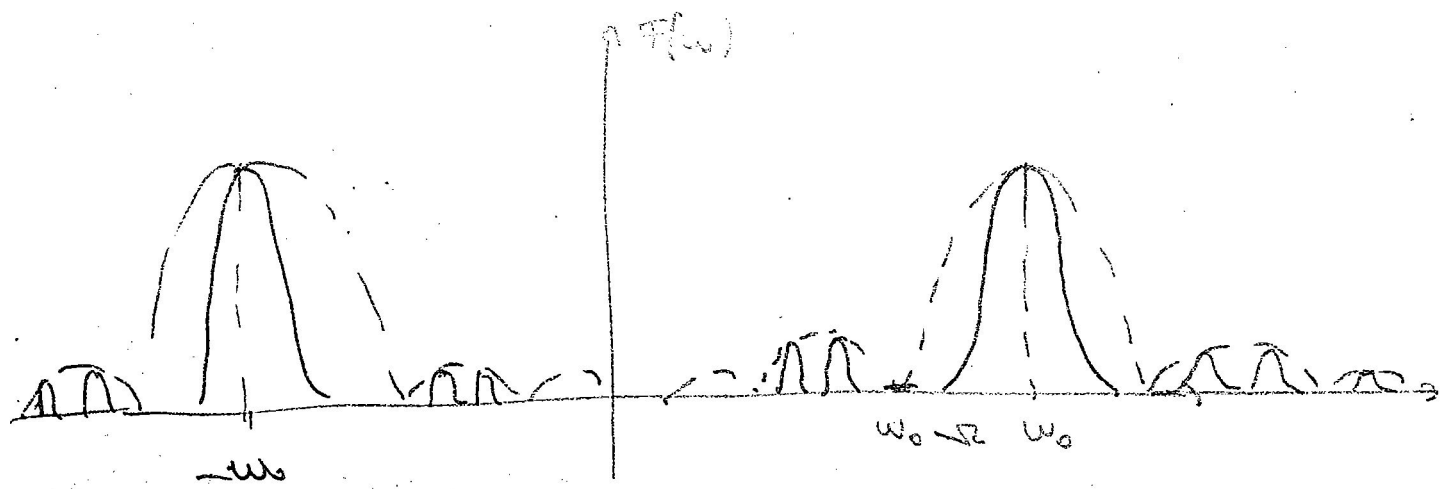
$$F(\omega) = \frac{2A\omega_0}{2\pi N} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\sin(\omega - \omega_0) + \sin(\omega + \omega_0) \right)$$

semnalul va arăta ca în figură și se observă că se obține semnalul inițial modulat cu $\cos \omega_0 t$.

Semnalul este semnalul PAM și se poate face obișnuit cel mai simplu prin detectare cu detector sincron cu cosinus sau cu detector de amplitudă.

Deci ω_0 nu îndeplinește aceste condiții

spectrul semnalului va fi ca în figură



În interiorul unei ~~sele~~ seale a și unibului atenuat
putem avea mai multe sau mai puține lăbe pro-
porționale cu $\sin(w)$

$$\frac{\sin \frac{2\pi}{2N} w_0}{n}$$

Pentru obținerea sumabilului $S(f)$ se poate folosi
un filtru pe bandă centrat pe ω_0 ,
realizându-se apoi detectia.

$$\frac{\sin \frac{2\pi}{2N} w_0}{2N} = 1 \Rightarrow \frac{w_0}{2} = \frac{2\pi}{N}$$

Pentru realizarea unei bune detectii ne trebuie să
se realizeze să fie mare.

$$R = \frac{w_0}{N}$$

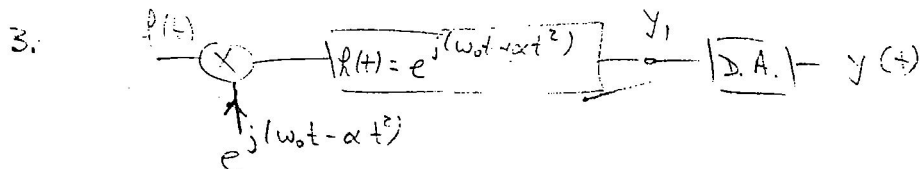
Deci sumabilul $S(f)$ este de bandă largă și de
donit ca se să fie mare. Pentru ca sumabilul să fie
putin distorsionat ceea ce implică

Concursul profesional la S.C. K.O.

1. Se consideră sistemul $H(z) = \frac{k}{(z-\alpha)^2}$. Să se deducă formula Weidelich în cazul general (semnal periodic variabil) și folosind rezultatul să se determine amplitudinea rețin în regim forțat în cazul particular $e_g[n] = \delta[n] - \delta[n-3]$, $k=1$, $\alpha=0$. Periodicitatea este $N=6$.

2. Se consideră un sistem canal de tip free-fot, având intrare $e(t)$ și ieșire $y(t)$. Să se demonstreze că:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 dt \geq \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$



Diferențial D.A. este ideal. Se cere:

- Să se determine răspunsul $y(t)$ și să se interpreteze
- Pentru cazul particular $f(t) = \frac{\sin 2\omega_0 t}{t}$ să se determine condiția ca răspunsul unui integrator ideal la intrarea cunoscută să aplice $y(t)$ să nu depășească valoarea A , impusă.
- Să se determine clase de semnale $\{g(t) | G(\omega) = j\omega \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{(\frac{\omega T}{2})^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0)\}$, unde $F(\omega)$ este arbitrar.

$$\{g(t) | G(\omega) = j\omega \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{(\frac{\omega T}{2})^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0)\}, \text{ unde } F(\omega) \text{ este arbitrar}$$

5. Un sistem discret are $H(z) = \frac{1}{z^2 - 2rz \cos \alpha + r^2}$. Să se determine

$1-r \ll 1$. Să se determine cea mai simplă expresie a termenilor la trei decibeli a sistemului.

1. Pentru cazul analogic $e_{ap}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_g(t) \delta(t-kT)$ și rezultă

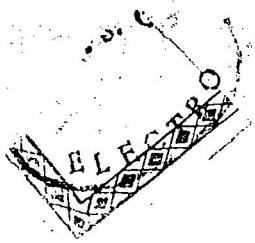
$$E_{ap}(s) = E_g(s) / (1 - e^{-sT})$$

$$\text{Făcând } s = j\omega \Rightarrow E_{ap}(j\omega) = E_g(j\omega) / (1 - e^{-j\omega T})$$

$$T = NT_0 \\ e^{j\omega T_0} = z$$

Trecând la transformare z vom obține:

$$E_{ap}(z) = E_g(z) / (1 - z^{-N})$$



$$Y(z) = H(z) E_g(z) = H(z) E_g(z) / (1 - z^{-N})$$

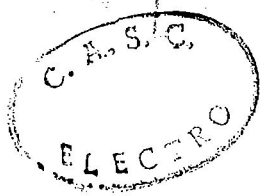
$$Y(z) = Y_{op}(z) + Y_e(z) = Y_g(z) / (1 - z^{-N}) + Y_e(z)$$

$$Y_g(z) = H(z) E_g(z) - Y_e(z) (1 - z^{-N})$$

in case of no stem $E_g(z) = \frac{z}{z-1} - \left(\frac{z}{z-1} \cdot z^{-3} + z^{-2} \nabla E_d + z^{-1} \nabla E_d + \right.$

$$\left. + \nabla E_d \right) = \frac{z}{z-1} - \left(\frac{z^{-2}}{z-1} + z^{-2} + z^{-1} + 1 \right)$$

3



4. Din forma lui $G(\omega)$ se observă că $g(t)$ este un semnal modulată cu impulsuri în amplitudine sample and hold. Semnalul modulată este $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ iar impulsul în care se face modularea $p_T(t)$ are transformata Fourier

$$P_T(\omega) = j\omega \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{(\frac{\omega T}{2})^2} \cdot T$$

Știm că fereastra în timp $P_{T/2}(t) \leftrightarrow \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega}$

$$T \cdot \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{(\frac{\omega T}{2})^2} = \frac{T}{T^2} \cdot \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} \cdot \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} = \frac{1}{T} \cdot P_{T/2}(\omega) \cdot P_{T/2}(\omega) = \frac{1}{j\omega} g(\omega)$$

Produsul lui în frecvență îi corespunde convoluției în timp, iar înmulțirea cu $j\omega$ în frecvență îi corespunde derivării în timp.

$$P_T(t) \leftrightarrow \frac{1}{T} \cdot j\omega P_{T/2}(\omega) \cdot P_{T/2}(\omega)$$

Ție $x(t)$ transformata inversă a lui $\frac{1}{T} P_{T/2}(\omega) \cdot P_{T/2}(\omega)$

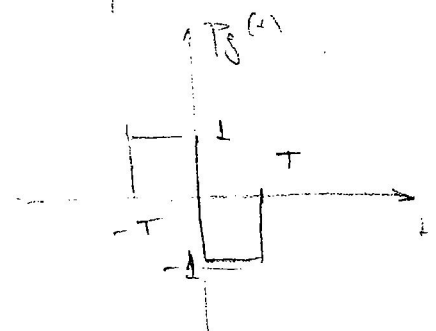
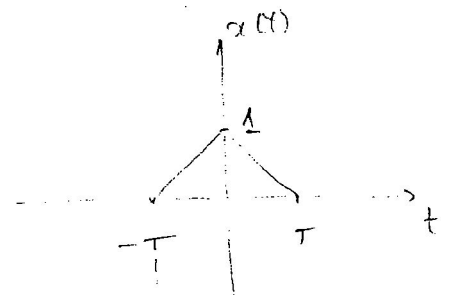
$$x(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} P_{T/2}(\tau) P_{T/2}(t-\tau) d\tau$$

$$t < 0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} 1 \cdot d\tau = \frac{1}{T} \tau \Big|_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} = \frac{1}{T} (t+T) = \frac{t}{T} + 1$$

$$t > 0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot d\tau = \frac{1}{T} \tau \Big|_{t-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{T} (T-t) = 1 - \frac{t}{T}$$

$$P_T(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$P_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{pt. } t \in [-T, 0) \\ -1 & \text{pt. } t \in (0, T] \end{cases}$$



$$5. H(z) = \frac{1}{z^2 - 2rz \cos \alpha + r^2}$$

$$z_{1,2} = r \cos \alpha \pm j r \sin \alpha$$

$$\Delta = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow z = \frac{2+\alpha T}{2-\alpha T}$$

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{2+\alpha T}{2-\alpha T}\right)^2 - 2r \cos \alpha \cdot \frac{2+\alpha T}{2-\alpha T} + r^2} = \frac{\Delta^2 T^2 - 4\alpha T + 4}{(\Delta T + 2)^2 - 2r(4 - \alpha^2 T^2) \cos \alpha + r^2(2-\alpha T)^2}$$

$$H(s) = \frac{T^2 \left(\Delta^2 + \frac{4}{T} \alpha + \frac{4}{T^2} z \right)}{\Delta^2 T^2 (1 + 2r \cos \alpha + r^2) + 4\alpha T (1 - r^2) + 4 - 8r + 4r^2}$$

$$H(s) = \frac{T^2 \left(\alpha^2 + \frac{4}{T} \alpha + \frac{4}{T^2} \right)}{\alpha^2 + 2\alpha + 1 + \omega_0^2} \quad \text{unde} \quad 2\alpha = \frac{4(1-r^2)}{T(r^2 + 2r \cos \alpha + 1)}$$

$$\omega_0^2 = \frac{4(r-1)^2}{T^2(r^2 + 2r \cos \alpha + 1)}$$

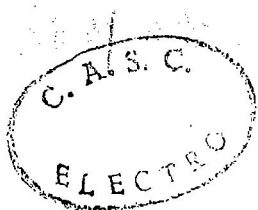
$$\left| \frac{\omega_0}{2\alpha} \right| = \left| \frac{2(r-1)}{\sqrt{r^2 + 2r \cos \alpha + 1}} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + 2r \cos \alpha + 1}}{4(1-r^2)} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{r^2 + 2r \cos \alpha + 1}}{2(r+1)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\omega_0 \leq \alpha$$

Deci $|H(j\omega)|$ nu are o crestere nehotarita
in dreptul lui ω_0

$$H(\omega) = \frac{4}{4(r-1)^2} = \frac{1}{(r-1)^2}$$



$$3. y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$\text{unde } f_1(t) = f(t) e^{j(\omega_0 t - \alpha t^2)}$$

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j(\omega_0 \tau - \alpha \tau^2)} e^{j[\omega_0(t-\tau) - \alpha(t-\tau)^2]} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\omega_0 t} e^{j\alpha t^2} e^{-2j\alpha t\tau} d\tau = e^{j(\omega_0 t + \alpha t^2)} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-2j\alpha t\tau} d\tau =$$

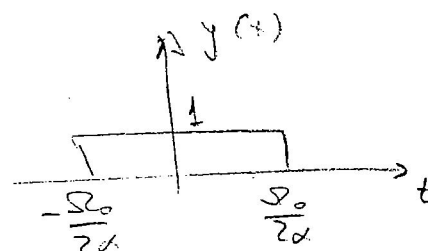
$$e^{j(\omega_0 t + \alpha t^2)} F(2\alpha t) \quad \text{unde } F \text{ este transformata Fourier a lui } f$$

Prin trecerea prin D.A. ideală, $y(t) = F(2\alpha t)$.
 Se obține un sistem care dă la rețre transformata Fourier a semnalului de la intrare.

6

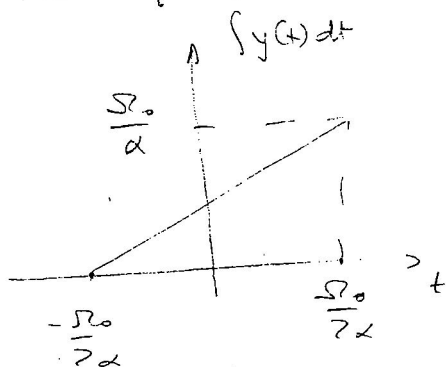
$$b) f(t) = \frac{\sin \Omega_0 t}{\pi t} \Rightarrow F(\omega) = P_{\Omega_0}(\omega)$$

$$y(t) = F(2\alpha t) = P_{\Omega_0}(\omega)$$



Prin aplicarea lui $y(t)$ la intrarea unui integrator ideal

se obține:



Conditia ca acest răspuns să nu se depășească valoarea A impune:

$$\left| \frac{\Omega_0}{\alpha} \leq A \right|$$

2. Sistemul fiind causal $h(t) = 0$ p.t. $t < 0$

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j \arg H(\omega)} = k e^{j \arg H(\omega)} = k e^{j \varphi(\omega)}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

① La intrarea unui filtru având f.d.t. $H(s) = \frac{\omega_r s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_r^2}$ se aplică un semnal M.A.P.S.

Să se determine:

- 1° Răspunsurile $s_1(t)$ și $s_2(t)$ ale detectorului de amplitudă respectiv discriminatorului de frecvență conectate la ieșirea filtrului dacă:
 - semnalul modulată este $s_m(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A e^{-\alpha t} & 0 < t < t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$
 - frecvența purtătoare este $\omega_0 = \omega_r + \Delta\omega$
 - $t_0 \gg \frac{2\pi}{\omega_r}$
- 2° Răspunsurile acestor detectoare dacă
 - semnalul modulată este periodic și se obține prin repetarea semnalului $s_m(t)$ cu perioadă $T > t_0$
 - frecvența purtătoare coincide cu frecvența centrală a filtrului
 - $t_0 \gg \frac{2\pi}{\omega_r}$
- 3° Perioada T astfel încât răspunsul de la pct. 2 al detect. de amplitudă să aibă maxime la momentele $t = \frac{t_0}{2} + nT$.

Soluție

10. Echivalentul de j.f.: $H_f(s) = \frac{\omega_r}{2(s+\alpha)}$; $H_f(s+j\Delta\omega) = \frac{\omega_r}{2(s+j\Delta\omega+\alpha)}$

$$h_f(t) = \frac{\omega_r}{2} e^{-(\alpha+j\Delta\omega)t} \cdot \delta(t).$$

a). $t < t_0$ $y_f(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \frac{\omega_r}{2} e^{-(\alpha+j\Delta\omega)\tau} d\tau = \frac{\omega_r}{2} e^{-\alpha t} \frac{1}{\Delta\omega} e^{j\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 \Delta\omega t - 2 \sin \Delta\omega t + 1}$

$$\cdot e^{j[\arctan\left(\frac{\sin \Delta\omega t}{1 - \cos \Delta\omega t}\right) + \pi]}$$

b). $t > t_0$ $y_f(t) = \int_0^{t_0} \dots = \frac{\omega_r}{2} \cdot \frac{1}{\Delta\omega} e^{-\alpha t} \sqrt{2(1 - \cos \Delta\omega t_0)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j[\arctan\left(\frac{\sin \Delta\omega t_0}{1 - \cos \Delta\omega t_0}\right) + \pi]}$

$$h_1(t) = \begin{cases} \frac{\omega_r}{2\Delta\omega} \cdot \sqrt{2(1 - \cos \Delta\omega t)} e^{-\alpha t} & 0 < t < t_0 \\ \frac{\omega_r}{2\Delta\omega} \sqrt{2(1 - \cos \Delta\omega t_0)} e^{-\alpha t} & t > t_0 \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt} \arctan \frac{\sin \Delta\omega t}{1 - \cos \Delta\omega t} & 0 < t < t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$$

2° Aplicând f. Weierdelich a stăruie

$$h_1(t) = A\alpha \left[t e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t_0} (t-t_0) e^{-\alpha(t-t_0)} \delta(t-t_0) - \frac{t_0}{1-e^{-\alpha T}} e^{-\alpha t} \delta(t) \right]$$

$$+ \frac{t_0}{1-e^{-\alpha T}} e^{-\alpha(t-T)} \delta(t-T)$$

$$h_2(t) = 0$$

3° Derivând expresia $h_1(t)$ corespunzătoare domeniului $t \in (0, t_0)$

s'impune condiția anului derivatului în punctul $t = \frac{t_0}{2}$ și stăruie

$$A\alpha \left[e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t} + \frac{\alpha t_0}{1-e^{-\alpha T}} e^{-\alpha t} \right] \Big|_{t=\frac{t_0}{2}} = 0$$

de unde

$$T = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1 + \alpha \frac{t_0}{2}}{1 - \alpha \frac{t_0}{2}}$$

1

25

Murariu
Adrian
Grupa 2308

2) 1. a) Se cons. filtrul digital recursiv def. de

$$fctia H(z) = \sum_{n=-N}^N a_n z^{-n} \text{ și filtrul analogic def.}$$

de $H_a(s)$. Se dorește ca filtre. digital să simuleze
răsp. în frecv. al filtru analog. al la frecv.

ω și ω_0 ($|n| \leq N$), cele 2 răsp. în frecv. să fie identice

$$\omega_0 = \frac{2\Omega_0}{N_0} ; N_0 = 2N+1$$

Să se determine fctia pondere a filtru. digital cauzal derivat din $H(z)$

să se comenteze rezultatul și să se simuleze filtrul obținut.

b) Să se găsească cond. ca un filtru având $H(z) = \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k z^{-k}$

să aibă :

a) fără lin. variabilă

b) fără zero

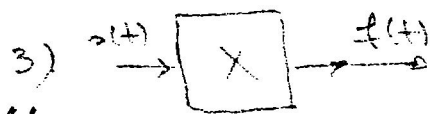
3) Să se găsească legăt. între cele 2 tipuri de fctii ob. transfer.

2 a) Să se arate că $\sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left\{ \frac{(n-p)\pi M T}{T} \right\} \text{sinc} \frac{p\pi T}{T} =$

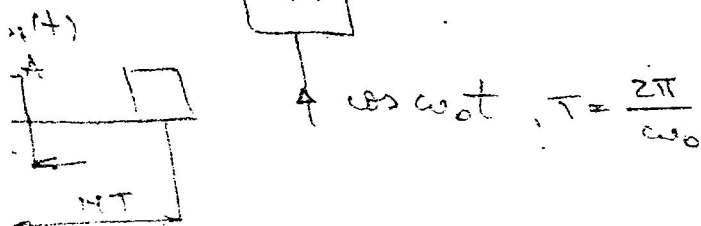
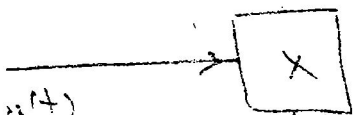
$$= \frac{T}{M T} \text{sinc} \left\{ \frac{n\pi T}{T} \right\}$$

$$\left[\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x} \right]$$

b) Să se arate că $\sum_{n=-1}^N \frac{\text{sinc } n\omega_0 T}{\pi T} = \frac{\text{sinc } \omega_0 T}{\pi T}$

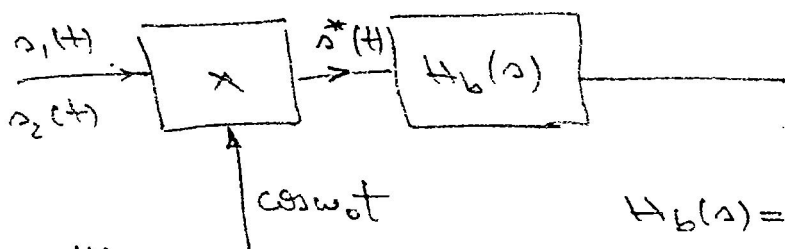


4 $\uparrow s^*(t)$

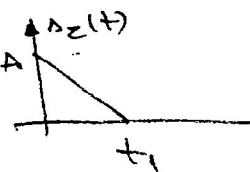
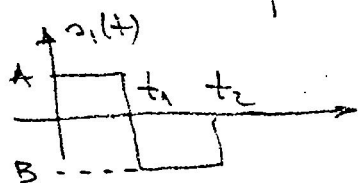


a) Să se det. spectru lui $f(t)$.

b) Să se discute posibilit. det. lui $s(t)$ din $f(t)$



$$H_b(s) = \frac{2\alpha s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$



Să se det. cond. ca răs. $y(t)$ la semnal să fie același ptr $t > t_2$

5) Se con. $s(t)$ de bandă limitată B în frecvență

a) Să se arate că $|s(t)| \leq (B \cdot E)^{1/2}$

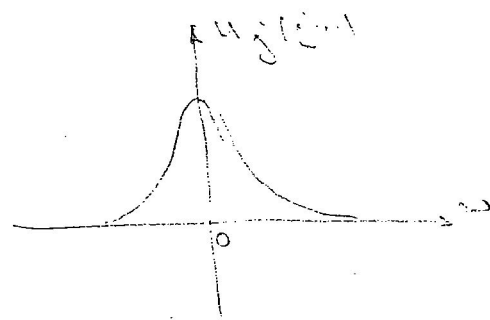
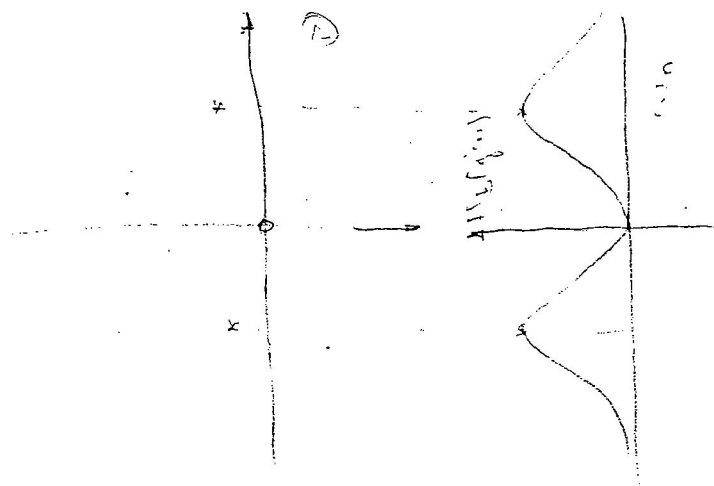
b) $|s^{(n)}(t)| \leq \pi^n \cdot \sqrt{\frac{B^{2n+1} \cdot E}{2n+1}}$

$$\frac{\tau}{-B/2} \quad \frac{\tau}{B/2}$$

c) Să se evalueze eroarea:

$$s\left\{(n+\frac{1}{2})T\right\} - s(nT) \text{ ptr } T = \frac{1}{2B}$$

4)



Deoarece $\alpha \ll \omega_0$ se poate folosi pentru rezolvarea problemei metoda trecerii la echiv. de j.F.

$$H_j(s) = \frac{A}{s + \alpha}$$

$$\frac{1}{2} H_j(0) = H_b(j\omega_0) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{\alpha} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} H_j(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}$$

$$y_j(s) = \frac{1}{s} H_j(s) \cdot E_j(s)$$

$$y_{2j}(s) = \frac{1}{s} H_j(s) \cdot S_{2j}(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} \cdot S_{2j}(s)$$

~~$$S_{2j}(t) = A - A \frac{t}{t_1} + A \frac{t-t_1}{t_2}$$~~

$$S_{2j}(t) = A \frac{t_1-t}{t_1} \sigma(t) + A \frac{t-t_1}{t_1} \sigma(t-t_1)$$

$$S_{2j}(s) = \frac{A}{s} - \frac{A}{t_1} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{A}{t_1} \cdot \frac{1}{s^2} e^{-st_1} =$$

$$= \frac{A}{s} - \frac{A}{t_1} \cdot \frac{1}{s^2} (1 - e^{-st_1})$$

$$y_{2j}(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} \left[\frac{A}{s} - \frac{A}{t_1} \cdot \frac{1}{s^2} (1 - e^{-st_1}) \right] =$$

$$= A\alpha \left[\frac{\frac{1}{\alpha}}{s} + \frac{-\frac{1}{\alpha}}{s+\alpha} \right] - \frac{A\alpha}{t_1} (1 - e^{-st_1}) \left[\frac{\frac{1}{\alpha}}{s^2} + \frac{\frac{1}{\alpha^2}}{s+\alpha} + \frac{-\frac{1}{\alpha^2}}{s} \right] = A \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right] - \frac{A}{t_1} (1 - e^{-st_1}) \cdot$$

$$\left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{s} \right]$$

$$y_{2j}(t) = A \sigma(t) - A e^{-\alpha t} \sigma(t) - \frac{A}{t_1} \left[t \sigma(t) + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \sigma(t) - \frac{1}{\alpha} \sigma(t) \right] + \frac{A}{t_1} \left[(t-t_1) \sigma(t-t_1) + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha(t-t_1)} \sigma(t-t_1) - \frac{1}{\alpha} \sigma(t-t_1) \right]$$

$$s_1(t) = A \sigma(t) - (A+B) \sigma(t-t_1) + B \sigma(t-t_2)$$

$$S_1(s) = \frac{A}{s} - \frac{(A+B)}{\alpha} e^{-st_1} + \frac{B}{\alpha} e^{-st_2} =$$

$$= \frac{A}{s} (1 - e^{-st_1}) - \frac{B}{\alpha} (e^{-st_1} - e^{-st_2})$$

$$y_1(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} \cdot \frac{A}{s} (1 - e^{-st_1}) = \frac{\alpha}{s+\alpha} \cdot \frac{1}{s} (e^{-st_1} - e^{-st_2})$$

$$= A(1 - e^{-st_1}) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right) - B(e^{-st_1} - e^{-st_2}) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha} \right)$$

$$y_1(t) = A\sigma(t) - A e^{-\alpha t} \sigma(t) - A\sigma(t-t_1) + A e^{-\alpha(t-t_1)} \sigma(t-t_1) -$$

$$B\sigma(t-t_1) - B\sigma(t-t_2) + B e^{-\alpha(t-t_1)} \sigma(t-t_1) +$$

$$+ B\sigma(t-t_2) - B e^{-\alpha(t-t_2)} \sigma(t-t_2)$$

Condiția ce se impune este ca $y_1(t_2) = y_2(t_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A - A e^{-\alpha t_2} - A + A e^{-\alpha(t_2-t_1)} - B + B e^{-\alpha(t_2-t_1)} =$$

$$\cancel{B - B e^{-\alpha t_2}} = A - A e^{-\alpha t_2} - \frac{A}{t_1} \left[t_2 + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t_2} - \frac{1}{\alpha} \right]$$

$$+ \frac{A}{t_1} \left[(t_2-t_1) + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha(t_2-t_1)} - \frac{1}{\alpha} \right]$$

$$1) A e^{-\alpha t_2} (e^{\alpha t_1} - 1) + B e^{-\alpha(t_2-t_1)} - B = A - \frac{A}{t_1 \alpha} e^{-\alpha t_2} + \frac{A}{t_1 \alpha} e^{-\alpha(t_2-t_1)}$$

$$2) \text{ Ptr } t^* > t_2 \Rightarrow A e^{-\alpha(t^*-t_1)} + B e^{-\alpha(t^*-t_1)} - B e^{-\alpha(t^*-t_2)} =$$

$$= A - \frac{A}{t_1 \alpha} e^{-\alpha t^*} + \frac{A}{t_1 \alpha} e^{-\alpha(t^*-t_1)}$$

Din condiția (1) rezultă legătura între A și B ptr ca

$$y_1(t) = y_2(t) \Leftrightarrow y_1(t) = y_2(t)$$

Din (2) se observă că ptr satisfacerea egalității, α trebuie să fie foarte mic

4

$$s) \quad s_g(t) = A, t \in [-T/2, T/2]$$

$$S_g(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T/2}^{T/2} =$$

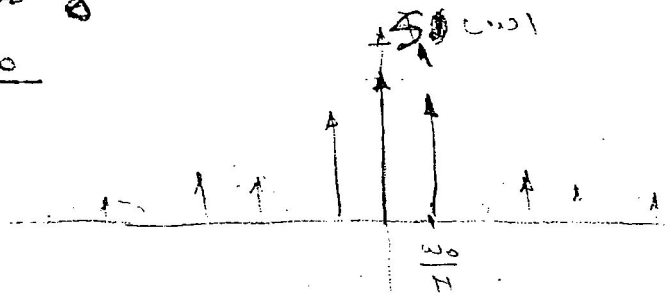
$$= \frac{A}{j\omega} [e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}] = \frac{2A}{\omega} \sin \omega T/2$$

$$NT = N \cdot \frac{2T}{\omega_0}$$

$$s_1(t) \leftrightarrow S_{s_1}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} S_g(uT) \delta(\omega - uT)$$

$$T = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi N} \cdot \omega_0 = \frac{\omega_0}{N}$$

$$\sin \omega T/2 \approx 0$$



$$\Rightarrow \sin \omega T/2 \approx 0$$

$$\Rightarrow \omega T/2 = k\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{2\pi N} \omega_0 \cdot \frac{T}{2} = k\pi \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{\omega_0} \cdot \frac{N}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ vom avea un divan anumit de infuziune.

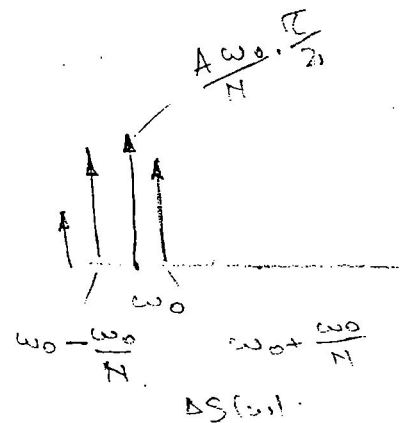
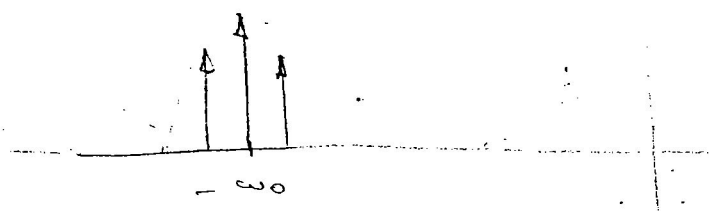
$$\text{dacă } T = \frac{2\pi N}{\omega_0}$$

$$s^*(t) = s_1(t) \cdot \cos \omega_0 t \Rightarrow S^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} [S_1(\omega) * [\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)]]$$

$$S^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2A}{\omega_0} \sin uT/2 \delta(\omega - uT) \right] * \left[\pi (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \right] =$$

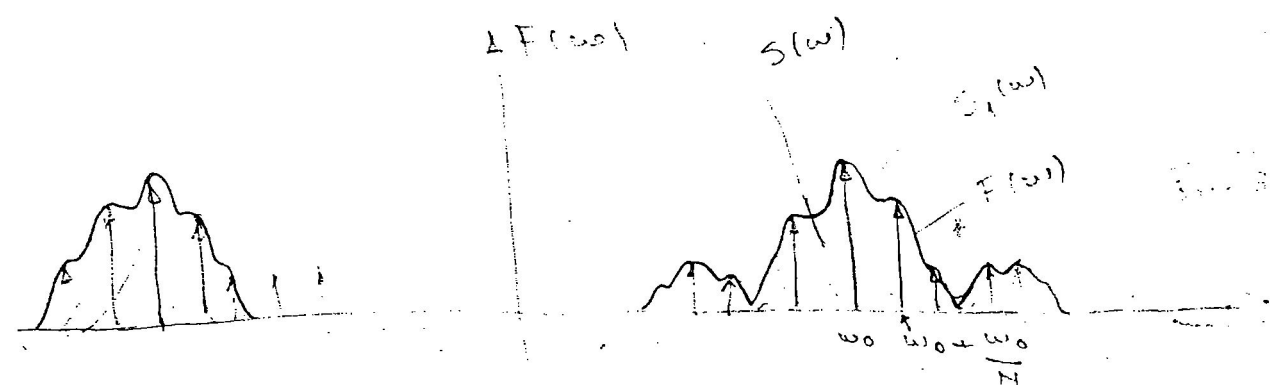
$$= \frac{2\pi}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2A}{\omega_0} \sin \left(u \frac{2\pi \omega_0}{2\pi N} \cdot \frac{T}{2} \right) \delta \left(T - u \frac{\omega_0}{N} \right) \cdot \left[\delta(\omega - T - \omega_0) + \delta(\omega - T + \omega_0) \right] dT =$$

$$\begin{aligned}
 &= A \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n \frac{\omega_0}{N} \cdot \frac{T}{2}\right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\tau - \frac{n}{N} \omega_0\right) \cdot \delta(\omega - \tau - \omega_0) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\tau - \frac{n}{N} \omega_0\right) \delta(\omega + \omega_0 - \tau) d\tau \right] = \\
 &= A \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n \frac{\omega_0}{N} \cdot \frac{T}{2}\right) \left[\delta\left(\omega - \frac{n}{N} \omega_0 - \omega_0\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \delta\left(\omega - \frac{n}{N} \omega_0 + \omega_0\right) \right] \\
 &\quad \Delta S^*(\omega) \quad \delta
 \end{aligned}$$



Dacă pp ptr $s(t)$ un spectru de forma
 atunci putem interpreta că fiecare pereche
 de diraci din $S^*(\omega)$ pot proveni de la o perturbare
 de exemplu cei de la $(\omega_0 + \frac{\omega_0}{N})$ și $(-\omega_0 - \frac{\omega_0}{N})$
 provin dintr-un $\cos(\omega_0 + \frac{\omega_0}{N})t$ și deci primul
 multiplicator ar face modularea lui $s(t)$ cu
 o infinitate de perturbări, de frecvențe $\omega_0 + \frac{n}{N} \omega_0$,
~~at~~ $n \geq 0$. Cu cât T va fi mai mare,
 cu atât nr. de perturbări va fi mai mic, deoarece
 spectrul lui $S_1(\omega)$ se restrânge (cosurile devin
 neglijabile).

spectrul lui $s(t)$ va fi:



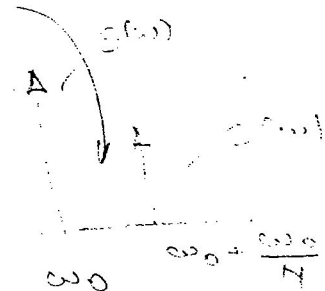
0 ~~detectie~~ detectie a lui $s(t)$ va fi posibilă dacă:

- T are valoare mare. În acest fel, corila corespunzătoare spectrelor simetrice nu se aduce un aport important în celălalt semiplan
- spectrul lui $s(t)$ este relativ îngust
- eșantionarea sinusului atenuat să se facă la intervale mari, pentru a nu apărea suprapuneri între 2 spectre ale lui $S_1(\omega)$ vecine.

Deci $\frac{\omega_0}{N}$ mare ($\Rightarrow N$ mic $\Rightarrow$)

$\Rightarrow NT$ mic

$\left. \begin{array}{l} T \text{ mare} \\ NT \text{ mic} \end{array} \right\} \Rightarrow$ factor de umplere mare ptr $s_1(t)$



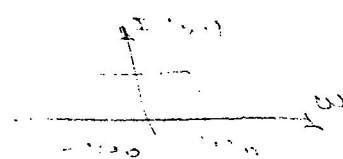
Detectia cea mai eficientă se poate face prin modularea lui $(\cos \omega_0 t)$ cu $s(t)$ și filtrarea $s(t)$ cu un filtru trece jos, cu lățimea dată de

$S(\omega)$

$$2b) f(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Ans. } F(\omega) = 1, \omega \in [-\omega_0, \omega_0]$$



$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{+j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jt} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} \\ = \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}$$

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

$$f(t) * g(t) \longleftrightarrow F(\omega) \cdot G(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$(2) f(t) * f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} 1 \cdot 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}$$

$$\mathcal{F}\{f(t) * f(t)\} = F(\omega)$$

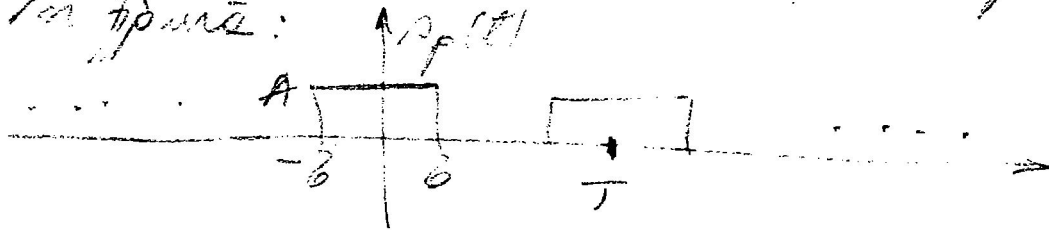
$$\text{Prin inductive } \Rightarrow \mathcal{F}\{f(t) * f(t) * \dots * f(t)\} = F(\omega)^N$$

$$\stackrel{N}{\underset{u=1}{*}} f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)^N\} \stackrel{N \text{ ori}}{=} f(t) \Rightarrow$$

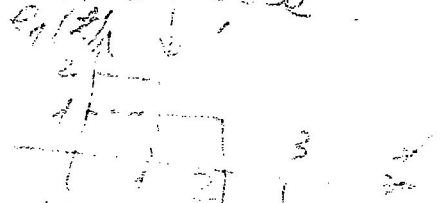
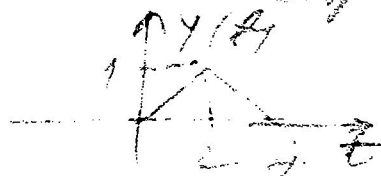
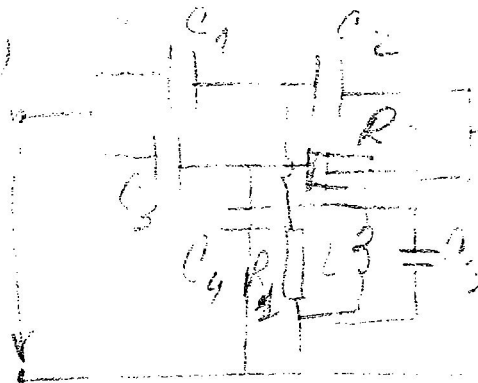
$$\stackrel{N}{\underset{u=1}{*}} \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} = \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}$$

d) În ce condiții pt. un s. cu MIA nat. resp. un detector ideal este invariant în cazul schimbării
scării timpului pt. s. purtător?

4) Dăți 2 exemple de semnale generatoare. 5
puncte repetarea cărora se obține s.p. prezentat
În formă: $\uparrow P_{f(0)}$

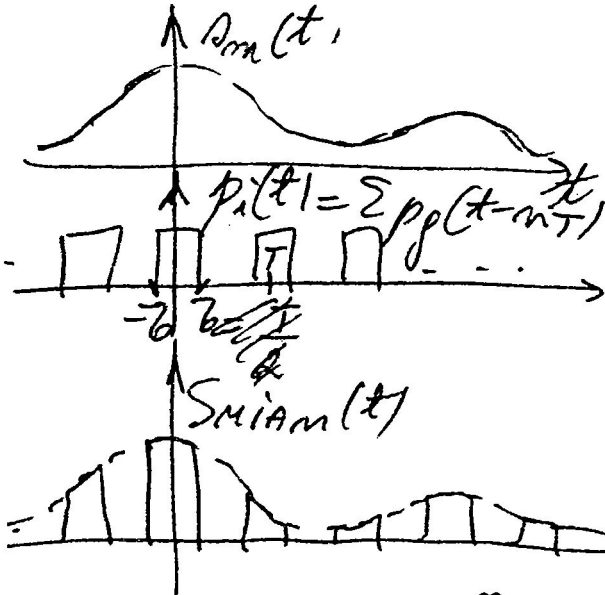


1000


$$f_0(z) = 1 : f(z) = \frac{z}{z-1}$$


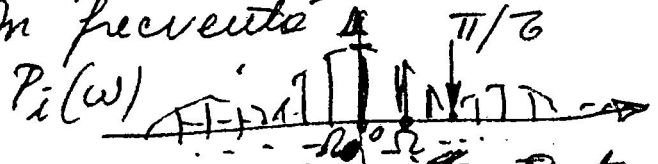
Se ce condiții care stă
dau bazei actuale au
dator de la societate
de 1919

$$(-) P_f(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \omega z.$$



$\hookrightarrow \int_{\Omega} f(\Omega)$

Expresii de bandă limitată
ca să nu apară interferențe
ale spectrelor diferite decalate
în frecvență $\frac{\pi}{2}$



$$p_i(t) = p_g(t) * \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = p_g(t) * \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega nT} =$$

$$P_A(\omega) = \Omega \sum_{-\infty}^{\infty} P_p(m\Omega) \cdot \delta(\omega - m\Omega) \quad ; \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$S_{MIAM}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot S_m(\omega) * P_i(\omega) =$$

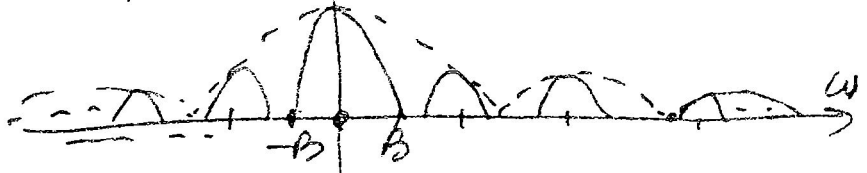
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_m(\sigma) \cdot R \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin m R \sigma}{m R} \cdot \delta(\omega - \sigma - m R) d\sigma =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n\Omega} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} S_m(\omega) \cdot \sin n\Omega \cdot \delta(\omega - \omega - n\Omega) d\omega}$$

$$J_m(\omega - n\Omega) \cdot \sin n\Omega t$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{dim } m \Omega \mathcal{G} \cdot S_m(\omega - m \beta) \quad \rho_{SMA}(m)$$

матер



$$= S_m(\omega) \cdot 2\pi B + \sum_{n \neq 0} \dots \dots \dots \Rightarrow \text{detectorul } V_{LIA_m}^{(ideal)} \text{ este un FTJ (ideal)}$$

$\Rightarrow$ prin FTJ se poate obține spectrul $S_m(\omega)$ al semnalului modulator dacă:

- $s_m(t)$ este semnal de bandă limitată.
- dacă spectrul semnalului $p_s(t)$, implicit al lui $p_g(t)$, are componentă continuă $\neq 0$ (deci forma impulsului trebuie să nu aibă valoare medie $\neq 0$ (deci formă $2B \ll R$ (pentru a nu avea interferențe) nulă).
- În general,

$$S_{LIA_m} = \frac{1}{T} \cdot S_m(\omega) * R \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_g(nR) \cdot \delta(\omega - nR)$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_g(nR) \cdot S_m(\omega - nR)$$

Trebuie $P_g(0) \neq 0$; $S_m(\omega) = 0$ pentru $|\omega| > B$.

Prin ochimularea scăzută timpului la semnalul purtător se modifică R (crește sau scade).

$\Rightarrow$ pentru $\neq B \neq 0$ se va ajunge la un $R_0 < 2B$ și detecția va fi incorectă $\Rightarrow$ e necesar ca $B=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_m(\omega) = \delta(\omega) \cdot \text{constantă}$.

$s_m(t) =$ curent continuu. În plus rațiune valabilă condiție $P_g(0) \neq 0$ (valoare medie $\neq 0$)

($t \rightarrow \text{at}$
 $T \rightarrow \Delta T$
 $R \rightarrow \frac{R}{a}$)

care nu interesează.

O altă posibilitate ar fi $P_g(nR) = 0$ pentru $n \neq 0$. Astfel pentru

$$\frac{T}{2} = R \Leftrightarrow T = \frac{2}{R} \Rightarrow nR \frac{2}{2} = nT \Rightarrow P_g(nR) = 0 \quad (n \neq 0)$$

$\Rightarrow$ spectrul LIA_m ar conține doar $S_m(\omega)$ și indiferent de variația lui t sau R , FTJ dă $S_m(\omega)$.

$$3) H(\omega) = \frac{1}{\omega + \alpha} \Rightarrow h(t) = e^{-\alpha t} \frac{1}{\omega}(t)$$

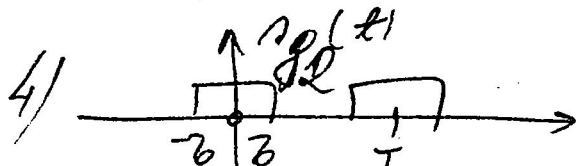
$$y(t) = b(t) - b(t-T) \Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{\omega} (1 - e^{-\omega T})$$

$$y(t) = h(t) * e(t)$$

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot E(\omega) \Rightarrow E(\omega) = \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} = \frac{1}{\omega} (1 - e^{-\omega T}) \cdot (\omega + \alpha)$$

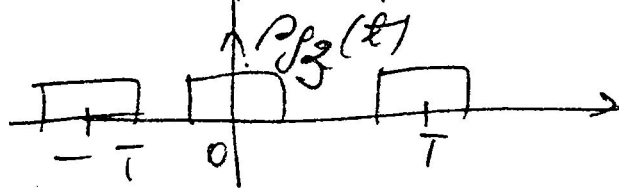
$$E(\omega) = (1 - e^{-\omega T}) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{\omega}\right)$$

$$\Rightarrow e(t) = \delta(t) + \alpha b(t) - b(t-T) - \alpha b(t-T)$$



$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{p1}(t - n \cdot 2T)$$

$$T_2 = 2T$$



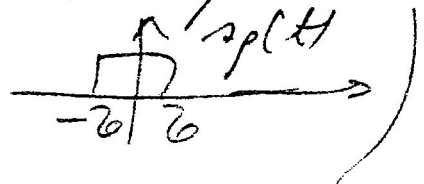
$$\Rightarrow p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{p2}(t - 3nT)$$

$$T_3 = 3T$$

In general, für

$$p_k(t) = \sum_{i=m}^p p(t - iT) \quad (k-1 \text{ Impulse})$$

$$p - m + 1 = k - 1$$

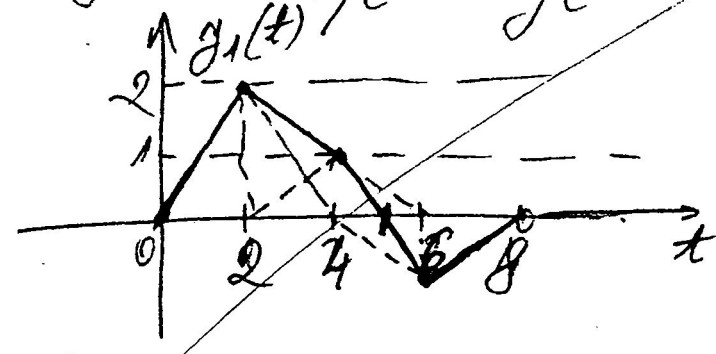


$$\Rightarrow p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - n \cdot KT)$$

$$T_K = KT$$

$$5) y_1(t) = 2y(t) + y(t-1) - y(t-2)$$

$$y_1(t) = 2y(t) + y(t-1) - y(t-2) \quad (\text{find system linear or invariant in time})$$



(Diagram: $Y_1(z) = H(z) \cdot E_1(z) = H(z) \cdot E(z) (2 + e^{-z} - e^{-2z})$)

Da $H(z) \cdot E(z) = Y(z) \Rightarrow Y_1(z) = Y(z) (2 + e^{-z} - e^{-2z})$

$$\Rightarrow y_1(t) = 2y(t) + y(t-1) - y(t-2)$$

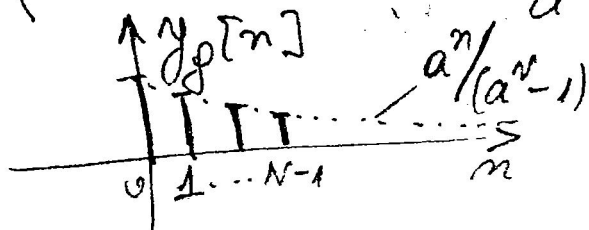
stimulare
6) Application:

$$Y_e(z) = \frac{k}{z-a} \quad k = \frac{a^N}{a^N-1}$$

$$Y_g(z) = \frac{z}{z-a} \left(-\frac{1}{a^N-1} \right) + z^{-N} \cdot \frac{a^N}{a^N-1} \cdot \frac{z}{z-a}$$

$$y_g[m] = -a^m \cdot \delta[m] \cdot \frac{1}{a^N-1} + \frac{a^N}{a^N-1} \cdot a^{m-N} \cdot \delta[m-N] =$$

$$= a^m (\delta[m] - \delta[m-N]) \cdot \frac{1}{a^N-1}$$



6) Metoda Weierstrass în cazul analitic determină răspunsul forțat al sistemului liniare la excitație periodică (cauzale)

cazul analitic
 $e_p(t) = E_p(s)$

$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e_p(t-nT)$

$E(s) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} \right) \cdot E_p(s)$

$E(s) = \frac{E_p(s)}{1 - e^{-sT}}$

↓
 Răspunsul total

$Y(s) = H(s) \cdot E(s)$

$Y(s) = \frac{H(s) \cdot E_p(s)}{1 - e^{-sT}}$

$y_f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_p(t-nT)$ (periodic la excitație periodică)

$Y(s) = \frac{Y_p(s)}{1 - e^{-sT}}$

$y(t) = y_f(t) + y_e(t)$

$Y(s) = Y_f(s) + Y_e(s)$

↓
 $H(s) \cdot E_p(s) = (1 - e^{-sT}) Y_e(s) + Y_p(s)$

↓
 $Y_e(s) = H(s) \cdot E_p(s) - (1 - e^{-sT}) Y_p(s)$

$Y_e(s)$ - provine din poliile lui $H(s)$

cazul discret

$e_p[n] \leftrightarrow E_p(z)$ ($e_p[n] = 0$ pt. $n \geq k$)

$e[n] = \sum_{m=0}^{\infty} e_p[n-mN]$ $n \geq 0$

$N = \text{perioada (discreta)}$
 $\rightarrow$ număr întreg

$E(z) = E_p(z) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} z^{-mN} = \Delta$

$E(z) = \frac{E_p(z)}{1 - z^{-N}}$

$Y(z) = H(z) \cdot E(z)$

$Y(z) = \frac{H(z) \cdot E_p(z)}{1 - z^{-N}}$

$y_f[n] = \sum_{m=0}^{\infty} y_p[n-mN]$

$Y_f(z) = \frac{Y_p(z)}{1 - z^{-N}}$

$y[n] = y_f[n] + y_e[n]$

$Y(z) = Y_f(z) + Y_e(z)$

↓
 $Y_e(z) = H(z) \cdot E_p(z) - (1 - z^{-N}) Y_p(z)$

$Y_e(z)$ se determină din $H(z) \cdot E_p(z)$ ținând cont de contribuția lui $H(z)$.

Aplicatie:

$$E_p(z) = F_p(z) = 1 \quad (\Rightarrow e_p[n] = \delta[n])$$

$$H(z) = \frac{z}{z-a} \quad (\Rightarrow h[n] = a^n \cdot \delta[n])$$

$$E(z) = \frac{E_p(z)}{1-z^{-N}} = \frac{1}{1-z^{-N}}$$

$$H(z) \cdot E(z) = \frac{z}{z-a} \cdot \frac{z^N}{z^N-1} = \triangleright$$

$$\Rightarrow Y_c(z) = \frac{K}{z-a} \quad K = \frac{a^N}{a^N-1}$$

$$Y_c(z) = \frac{z}{z-a} \cdot 1 - (1-z^{-N}) \cdot \frac{K \cdot z}{z-a} =$$

$$= \frac{z}{z-a} - (1-z^{-N}) \cdot \frac{K}{z-a}$$

$$= (1-z^{-N}) \cdot \frac{a^N}{a^N-1} + \frac{z}{z-a} \cdot \left(1 - \frac{K}{a} + \frac{K}{a} \cdot z^{-N}\right)$$

$$Y_c(z) = \left[1 - \frac{a^N}{a^N-1} \cdot (1-z^{-N})\right] \cdot \frac{z}{z-a} + \frac{a^N}{a^N-1} \cdot \frac{z^{-N}}{z-a}$$

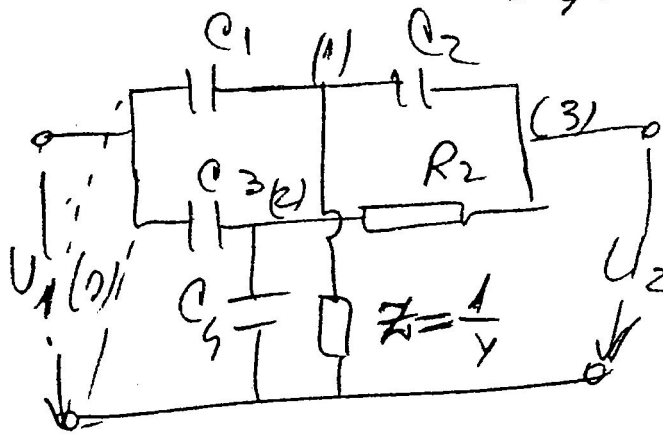
(Continuare după problema 5)

$$y_c[n] = \frac{a^N}{a^N-1} [\delta[n] - \delta[n-N]] - \frac{1}{a^N-1} a^n \delta[n] + \frac{a^N}{a^N-1} a^{n-N} \delta[n-N]$$

$$y_c[n] = \frac{a^N}{a^N-1} [\delta[n] - \delta[n-N]] - \frac{1}{a^N-1} (a^n \delta[n] - a^n \delta[n-N])$$

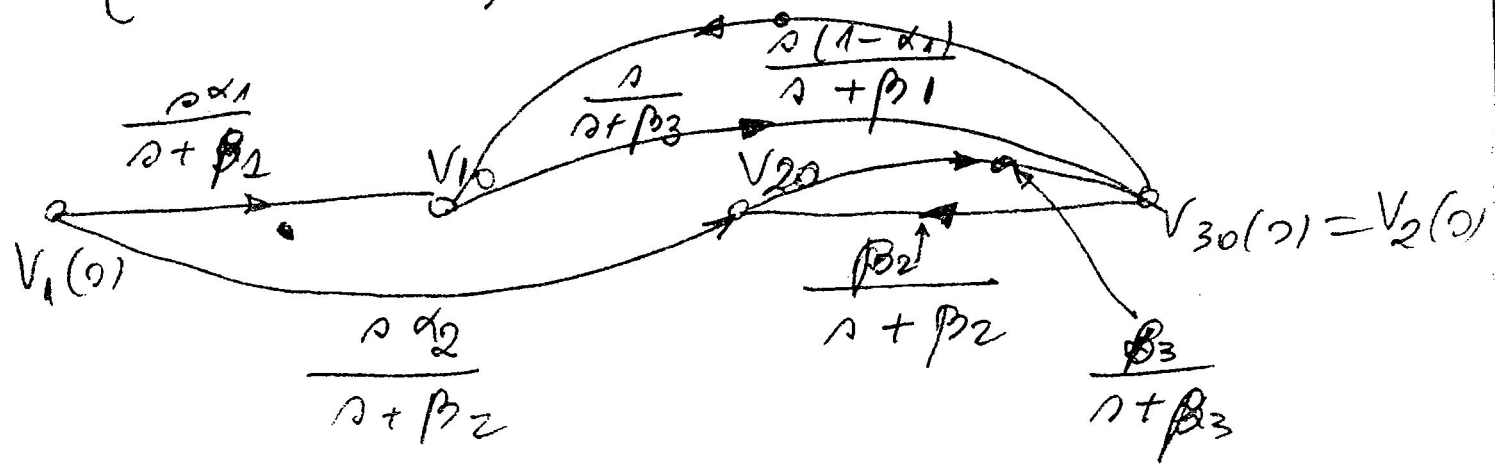
$$y_c[n] = \frac{a^N}{a^N-1} \cdot \delta[n] - \frac{1}{a^N-1} \sum_{m=0}^{\infty} (a^{n+m} (\delta[n] - \delta[n-N])) \Big|_{m=n-mN}$$

⑦



$$\begin{aligned}
 (1 + sC_1)V_1(s) &= (sC_1 + sC_2 + Y)V_{10}(s) - sC_2 V_{30}(s) \\
 sC_3 V_1(s) &= (sC_3 + sC_4 + G_2)V_{20}(s) - G_2 V_{30}(s) \\
 0 &= -sC_2 V_{10} - G_2 V_{20} + (sC_2 + G_2)V_{30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 V_{30} = \frac{sC_2}{sC_2 + G_2} V_{10} + \frac{G_2}{sC_2 + G_2} V_{20} \\
 V_{10}(s) = \frac{sC_1}{s(C_1 + C_2) + Y} V_1(s) + \frac{sC_2}{sC_1 + sC_2 + Y} V_{30}(s) \\
 V_{20}(s) = \frac{sC_3}{sC_3 + sC_4 + G_2} V_1(s) + \frac{G_2}{sC_3 + sC_4 + G_2} V_{30}(s)
 \end{cases}$$



$\alpha_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$ $\beta_1 = \frac{Y}{C_1 + C_2}$	$\alpha_2 = \frac{C_3}{C_3 + C_4}$ $\beta_2 = \frac{G_2}{C_3 + C_4}$	$\beta_3 = \frac{G_2}{C_2}$
--	--	-----------------------------

$$t(s) = \frac{(s+\beta_1)(s+\beta_3)}{(s+\beta_2)(s+\beta_3)} \cdot \frac{1 - \left[\frac{\beta_2 \beta_3}{(s+\beta_2)(s+\beta_3)} + \frac{s^2(1-\alpha_1)}{(s+\beta_1)(s+\beta_3)} \right]}$$

$$4(s) = \frac{s^2 \alpha_1 (s+\beta_2) + s \alpha_2 \beta_3 (s+\beta_1)}{(s+\beta_1)(s+\beta_2)(s+\beta_3) - s^2(1-\alpha_1)(s+\beta_2) - \beta_2 \beta_3 (s+\beta_1)}$$

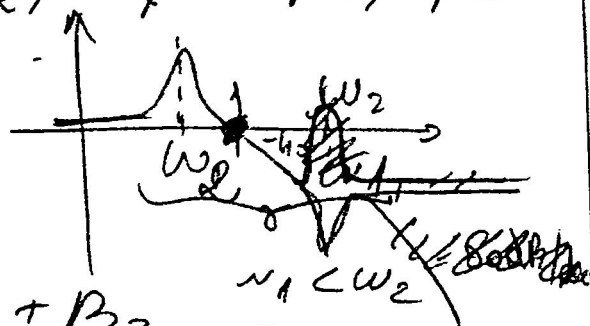
$$4(s) = \frac{s \left[s^2 \alpha_1 + \alpha_2 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_2) + \alpha_2 \beta_3 \beta_1 \right]}{s^2 (\beta_1 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 + \beta_3 \beta_1 - \beta_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_1) + \alpha_1 s^3 + (\beta_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_3 + \beta_2 \beta_3 - \beta_2 \beta_3) + \alpha_1 s^3}$$

$$4(s) = \frac{s^2 \alpha_1 + s (\alpha_1 + \alpha_2) \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 \beta_3}{s^2 \alpha_1 + s (\beta_1 + \beta_3 + \alpha_1 \beta_2) + (\beta_2 + \beta_3) \cdot \beta_1}$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 2\alpha s + \omega_1^2}{s^2 + 2\beta s + \omega_2^2}$$

$$\alpha = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \beta_2}{2 \alpha_1} \quad j2\beta = \frac{\beta_1 + \beta_3}{\alpha_1} + \beta_2$$

$$\omega_1^2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta_1 \beta_3, \quad \omega_2^2 = \frac{(\beta_2 + \beta_3) \cdot \beta_1}{\alpha_1}$$



Continuation
pp. 9.

$$H(j\omega) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 - \omega_0^2 = 0 \\ \alpha \geq 0 \end{cases} \quad \text{false} \quad \alpha_1 + \alpha_2 \beta_2 \geq 0$$

(7) Continuare:

~~Pentru~~ $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta_2 = \beta_2 + \beta_3$

$$(\Rightarrow) \frac{C_3}{C_3 + C_4} \cdot \frac{G_2}{C_2} = \frac{G_2}{C_2} + \frac{G_2}{C_3 + C_4}$$

$$(\Rightarrow) C_3 = C_3 + C_4 + C_2$$

$$(\Rightarrow) C_4 + C_2 = 0 \text{ imposibil.}$$

$\Rightarrow \omega_1 \neq \omega_2$.

Observăm la $\omega_{rez} = \frac{1}{LC_5}$:

$$Z = \infty; Y = 0 \Rightarrow \boxed{\beta_1 = 0}$$

$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = 0$, f. d. t. devine:

$$\Rightarrow H(s) = \frac{s + 2\alpha}{s + 2\beta} = \frac{s + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\beta_2}{\alpha_1}}{s + \left(\frac{\beta_3}{\alpha_1} + \beta_2\right)}$$

$\Rightarrow H$ are un zero (și nu pol)

$$\text{Zero-ul are } \omega_z = \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\beta_2 =$$

$$= \left[1 + \frac{C_3(C_1 + C_2)}{C_1(C_3 + C_4)}\right] \cdot \frac{G_2}{C_3 + C_4}$$

Dacă $\omega_z = \omega_{rezonant}$ $(\Rightarrow) \frac{1}{LC_5} = \left[1 + \frac{C_3(C_1 + C_2)}{C_1(C_3 + C_4)}\right] \cdot \frac{G_2}{C_3 + C_4}$

atunci H are un zero la această frecvență.
cu condiție $\otimes$.

1) Un semnal MF are forma (pp. purtătoare armonică)

$$p_{MF}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t p_{\text{modulator}}(t) dt. \text{ Pentru ușurință folosim } \\ \text{formula semnalelor MF.}$$

$$p_{MF}(t) = A \cos \omega_0 t \cdot \cos \varphi(t) - A \sin \omega_0 t \cdot \sin \varphi(t)$$

Dacă $\varphi'(t) \ll 1$ ($\varphi(t)$ = semnal lent variabil)

$$\varphi(t) \approx \varphi(0) + t\varphi'(t) \text{ (neglijind derivatele de } \\ \text{ordin superior)}$$

Presupunând $\varphi(0) = 0$ (sau $\varphi(0) = \varphi_0$)

$$\Rightarrow p_{MF}(t) = A \cos \omega_0 t \cdot \cos(t\varphi'(t)) - \\ - A \sin \omega_0 t \cdot \sin(t\varphi'(t))$$

$$\varphi'(t) \ll 1 \Rightarrow \cos(t\varphi'(t)) \approx 1; \sin(t\varphi'(t)) \approx t\varphi'(t)$$

$$\Rightarrow p_{MF}(t) = A \cos \omega_0 t - \underbrace{(A t \cdot \varphi'(t))}_{A(t)} \cdot \sin \omega_0 t$$

$$p_{MA}(t) = A \cos \omega_0 t + p_m(t) \cdot \cos \omega_0 t \quad \left. \begin{array}{l} \text{sînt semnale} \\ \text{asemănătoare} \\ \text{cu excepție de} \\ \text{defazaj de } \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

În ipoteza: $\varphi(t)$ lent variabil $p_{MF} \approx p_{MA}$.

$$4) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{p\pi\tau}{T}}{\frac{p\pi\tau}{T}} \cdot \frac{\sin \frac{(n-p)\pi M\tau}{T}}{\frac{(n-p)\pi M\tau}{T}} =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{p\pi\tau}{T}}{\frac{p\pi\tau}{T}} \cdot \frac{\sin (n-p)\tau \cdot \Omega_0}{(n-p)\tau \cdot \Omega_0}$$



$$\text{cu } \Omega_0 = \frac{\pi M}{T} = \frac{2\pi}{T_0}$$

Suma de sus reprezintă convoluția discretă între

semnalul discret $f_{\Omega_0}(p\tau) = \frac{\sin \frac{p\pi\tau}{T}}{\frac{p\pi\tau}{T}}$ și

semnalul discret $\frac{\sin (n-p)\Omega_0\tau}{(n-p)\Omega_0\tau}$

$\frac{\sin n\pi}{n\pi}$ - unitate ptr convoluția discretă (2)

$$\Rightarrow f(n\tau) = f(n\tau) * \frac{\sin n\pi}{n\pi}$$

în cazul nostru luăm $k = \frac{p\tau}{T}$

~~$$f(n\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi}{k\pi} \cdot \frac{\sin (n\tau - k)\pi M}{(n\tau - k)\pi M}$$~~

~~$$f(n\tau) = \frac{T}{M\tau} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi\tau}{T}}{\frac{n\pi\tau}{T}} = \frac{T^2}{M\pi n\tau^2} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi\tau}{T}}{\frac{n\pi\tau}{T}}$$~~

~~$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi}{k\pi} \cdot \frac{\sin \left(\frac{n\pi M\tau}{T} - k\pi M \right)}{\frac{n\pi M\tau}{T} - k\pi M} =$$~~

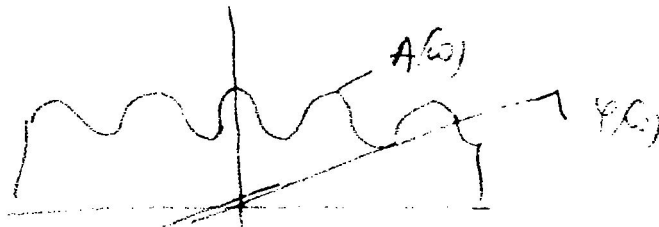
~~$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi}{k\pi} \cdot \frac{\sin \left(\frac{n\tau}{T} - k \right) \pi M}{\pi M \left(\frac{n\tau}{T} - k \right)} = \frac{\sin}{\pi M \left(\frac{n\tau}{T} - k \right)}$$~~

1. Se consid. func. caract. de unu. supradre. în frecvență.

$$A(\omega) = \begin{cases} a + b \cos \frac{\pi \omega}{\Omega} & |\omega| \leq \Omega \\ 0 & |\omega| > \Omega \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = -\omega t_0$$

$$H(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$$



a) să se det. răsp. la impuls direct a filterului.

b) să se det. răsp. filterului la o excitare armonică

și să se interpreteze rezultatele

c) să se generalizeze problema.

2) să se calculeze $\epsilon(t) = \frac{\text{mixt}}{\pi t} * \frac{\text{mat}}{\pi t}$

a) să se găsească transformata Fourier a rezultatului.

$$\frac{d}{dt} f(t) = B \times f(t) = 2 \times f(t)$$

3) 3) să se det. expresia de calcul al unui sistem de tipul

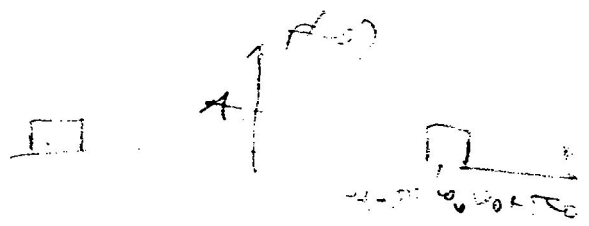
și dependent de variabila $\alpha = \frac{1}{5} (1 + \frac{1}{5}) / z = e^{j\omega t}$

b) să se det. forma exprimată a fct. $|H(\omega)|$

c) să se det. expresia de calcul a fct. $|H(\omega)|$

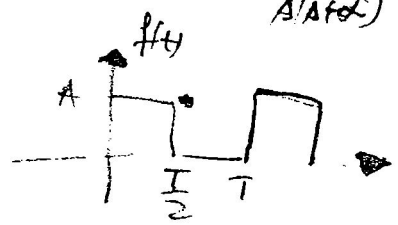
$|H(\omega)| = \dots$ det.
* soluția numerică

4. Se consideră sistemul de blocuri cu funcția de transfer



Amplasamentul se caracterizează structural cu o succesiune de impulsuri de amplitudine constantă de perioadă T și frecvență $\omega = 1/T$.
 a) să se determine spectrul amplitudinii medii
 b) să se compună un spectru eliberat prin reacție negativă cu câștig K la intrare în blocul de transfer $H(s)$ în raport cu T și ω .

5) Det. resp. factorul al sistemului $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ la semnalele periodice



$$f(t) = \begin{cases} A & \text{pt. } t \in [0, T/2) \\ 0 & \text{pt. } t \in [T/2, T) \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{A}{s} \cdot (1 - e^{-sT/2})$$

$$Y(s) = F(s) \cdot H(s) = Y_e(s) \cdot (1 - e^{-sT})$$

$$Y_e(s) = \frac{A}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \cdot (1 - e^{-sT/2}) = Y_e(s) \cdot (1 - e^{-sT})$$

$$Y(s) = F(s) \cdot H(s) = \frac{F(s) \cdot H(s)}{1 - e^{-sT}} = \frac{A \cdot (1 - e^{-sT/2})}{s \cdot (1 - e^{-sT})} \cdot \frac{1}{s(s+1)}$$

Soluția de regim liber este

$$Y_e(s) = \left(\frac{A \cdot (1 - e^{-sT/2})}{s \cdot (1 - e^{-sT})} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \right) \Big|_{s=0} \cdot \frac{1}{s} + \left(\frac{A \cdot (1 - e^{-sT/2})}{s \cdot (1 - e^{-sT})} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \right) \Big|_{s=-1} \cdot \frac{1}{s+1}$$

Considerând $H(s)$ de forma $H(s) = \frac{1}{(s+p)(s+1)}$ cu $p=0$

$$Y_E(s) = \frac{A}{-\beta} \cdot \frac{1}{1+e^{-\beta \frac{T}{2}}} \cdot \frac{1}{\alpha-\beta} \cdot \frac{1}{s+\beta} + \text{C.A.}$$

$$+ \frac{A}{-\alpha} \cdot \frac{1}{1+e^{-\alpha \frac{T}{2}}} \cdot \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot \frac{1}{s+\alpha}$$

$$Y_g(s) = \frac{A}{s} \cdot \frac{1}{(s+\beta)(s+\alpha)} \cdot (1-e^{-s \frac{T}{2}}) + \frac{A}{\beta} \cdot \frac{1-e^{-sT}}{1+e^{-\beta \frac{T}{2}}} \cdot \frac{1}{\alpha-\beta} \cdot \frac{1}{s+\beta} +$$

$$+ \frac{A}{\alpha} \cdot \frac{1-e^{-sT}}{1+e^{-\alpha \frac{T}{2}}} \cdot \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot \frac{1}{s+\alpha}$$

$$Y_g(s) = \frac{A}{\alpha^2} (1-e^{-s \frac{T}{2}}) \cdot \left(+ \frac{\alpha}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+\alpha} \right) + \frac{A}{\beta(\alpha-\beta)(1+e^{-\beta \frac{T}{2}})}$$

$$\frac{1-e^{-sT}}{s+\beta} + \frac{A}{\alpha(\beta-\alpha)(1+e^{-\alpha \frac{T}{2}})} \cdot \frac{1-e^{-sT}}{s+\alpha}$$

$$Y_g(t) = \frac{A}{\alpha} \cdot t \delta(t) - \frac{A}{\alpha} \cdot (t-\frac{T}{2}) \cdot \delta(t-\frac{T}{2}) - \frac{A}{\alpha^2} \cdot \delta(t) + \frac{A}{\alpha^2} \cdot \delta(t-\frac{T}{2}) +$$

$$+ \frac{A}{\alpha^2} \cdot e^{-\alpha t} \delta(t) - \frac{A}{\alpha^2} \cdot e^{-\alpha(t-\frac{T}{2})} \delta(t-\frac{T}{2}) + \frac{A}{\beta(\alpha-\beta)(1+e^{-\beta \frac{T}{2}})}$$

$$\cdot \left[e^{-\beta t} \cdot \delta(t) + e^{-\beta(t-T)} \cdot \delta(t-T) \right] + \frac{A}{\alpha(\beta-\alpha)(1+e^{-\alpha \frac{T}{2}})}$$

$$\cdot \left[e^{-\alpha t} \cdot \delta(t) - e^{-\alpha(t-T)} \cdot \delta(t-T) \right]$$

$$2) \quad x(t) = \frac{\sin \alpha t}{\pi t} * \frac{\sin t}{\pi t} \quad 4$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin \alpha t}{t}\right) =$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{t}\right) = j\pi [1 - 2\delta(\omega)]$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin \alpha t}{\pi t}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot j\pi [1 - 2\delta(\omega - \alpha)] - [1 + 2\delta(\omega + \alpha)] =$$

$$= \delta(\omega + \alpha) - \delta(\omega - \alpha)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right) = \delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left(\frac{\sin \alpha t}{\pi t}\right) \cdot \mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right) =$$

$$= [\delta(\omega + \alpha) - \delta(\omega - \alpha)] \cdot [\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)]$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\} = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega + \alpha) - \delta(\omega - \alpha)] \cdot [\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)] \cdot e^{-j\omega t} d\omega$$

b) Consideration $x(t) \rightarrow X(\omega)$

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow j\omega X(\omega)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \rightarrow -\omega^2 X(\omega)$$

$$jtx(t) \rightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

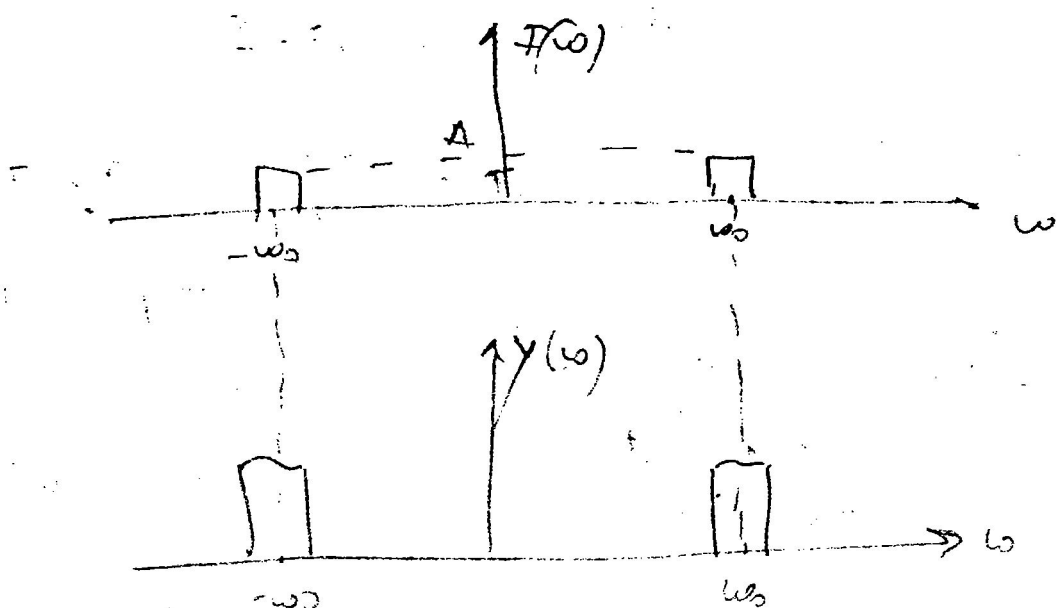
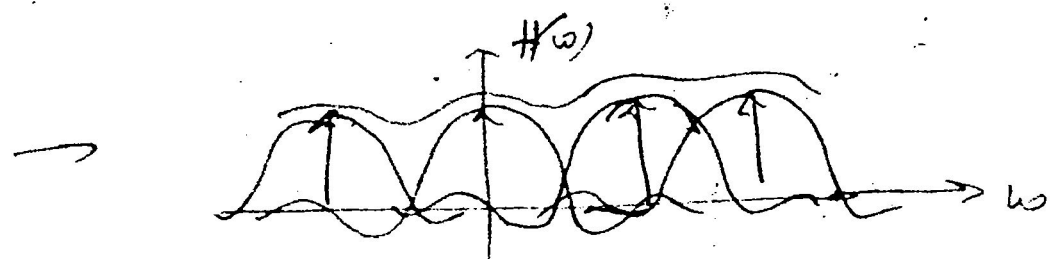
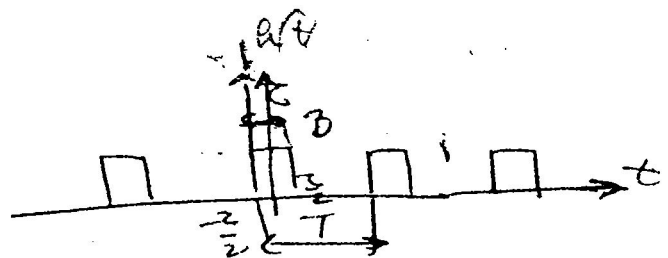
$$-tx(t) \rightarrow \frac{d^2X(\omega)}{d\omega^2}$$

transf. Fourier a la 2^e partie

$$-\omega^2 X(\omega) + \frac{d^2X(\omega)}{d\omega^2} = \lambda X(\omega)$$

4)

C.A.S
ELECTRO



$$H(\omega) = B \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{j n \omega T}$$

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot F(\omega)$$

$$F(\omega) = 2A\Omega_0 \cdot \delta(\omega - \omega_0) + 2A\Omega_0 \cdot \delta(\omega + \omega_0) = 2A\Omega_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$Y(\omega) = \frac{2B \sin \omega \frac{T}{2}}{\omega} \cdot 2A\Omega_0 \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} e^{j n \omega T} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] =$$

$$= 4A\Omega_0 B \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \sum_{-\infty}^{\infty} e^{j n \omega T}$$

~~Handwritten scribbles and crossed-out text.~~

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{j n \omega T} \leftrightarrow [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$f(t) = \frac{2A\omega_0}{\pi} \cos \omega_0 t$$

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(\tau-z) d\tau$$

$$h(t) = \begin{cases} B & t \in \left(nT - \frac{\tau}{2}; nT + \frac{\tau}{2}\right) \\ 0 & t \in \left[nT + \frac{\tau}{2}, (n+1)T - \frac{\tau}{2}\right] \end{cases}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT - \frac{\tau}{2}}^{nT + \frac{\tau}{2}} \frac{2A\omega_0}{\pi} \cos \omega_0 \tau \cdot B d\tau =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2A\omega_0 B}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 \tau \Big|_{nT - \frac{\tau}{2}}^{nT + \frac{\tau}{2}} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2AB\omega_0}{\pi \omega_0} \cdot \left[\sin \left(nT + \frac{\tau}{2}\right) - \sin \left(nT - \frac{\tau}{2}\right) \right] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2AB\omega_0}{\pi \omega_0} \cdot \sin \frac{\tau}{2} \cdot \cos nT = \frac{2AB\omega_0}{\pi \omega_0} \cdot \sin \frac{\tau}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos nT$$

§. 3. $H(e^{j\omega T})$ e o funcție periodică obținută prin repetarea lui $H(j\omega)$ ~~spectrul de energie~~ sistemului etc.

$$\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega$$

bacă mini sistem analogic de bandă limitată și aplic la intrare un semnal analogic discret, obț prin esantionarea unui semnal min. a unui frec. e de bandă sistemului $\rightarrow$ (presupunând că esantionarea e face respectând teorema esantionării) că sem. de la ieșire e minimizat cu amplit. prop. $|H(j\omega)|$ și de amplit. intrării.

$$\text{defazajul} = \arg H(j\omega)$$

$$\omega = \frac{1}{T} \left(k + \frac{1}{2} \right) \cdot 2\pi \Rightarrow e^{j\omega T}$$

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(j\omega) \cdot \dots$$

$$a). \frac{1}{t} \leftrightarrow -j\pi \operatorname{sign}(\omega)$$

$$\frac{1}{\pi t} \operatorname{med} t \leftrightarrow \frac{1}{2j} \cdot \frac{f(\pi)}{\pi} \left[\operatorname{sign}[j(\omega-\omega_0)] - \operatorname{sign}[j(\omega+\omega_0)] \right]$$

$$\frac{\operatorname{mlt}}{\pi t} \leftrightarrow -\frac{1}{2} \left[\operatorname{sign}[(\omega-1)] - \operatorname{sign}[(\omega+1)] \right]$$

$$\frac{d^2 X(\omega)}{d\omega^2} - \omega^2 X(\omega) = \lambda X(\omega)$$

C. A.
ELECTRO

Transf. Fourier $X(\omega)$ a lui $x(t)$ satisface ecuația
de diferențială ca și $x(t)$ unde
lui $X(\omega) \leftrightarrow x(t)$
 $\omega \leftrightarrow t$.

$$1. H(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$$F(t) = F(t)$$

$$F(\omega) = 1.$$

↓

Răspunsul la $\delta(t)$ este

$$Y(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(a + b \cdot \omega \frac{n\pi\omega}{\Omega} \right) \cdot e^{-j\omega(t+t_0)} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{j a}{j\omega(t+t_0)} \cdot e^{-j\omega(t+t_0)} \Big|_{-\Omega}^{\Omega}$$

$$Y(\omega) = a \cdot e^{-j\omega(t+t_0)} + b \cdot \omega \frac{n\pi\omega}{\Omega} \cdot e^{-j\omega(t+t_0)}$$

~~de la 20740~~

$$a\delta(t)/\epsilon = a$$

$$a e^{-j\omega(t+t_0)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{j a}{j\omega(t+t_0)} e^{-j\omega(t+t_0)} \Big|_{-\Omega}^{\Omega} + \frac{b}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \omega \frac{n\pi\omega}{\Omega} \cdot e^{-j\omega(t+t_0)} d\omega$$

Să calculăm în cazul general

$$\int \cos ax \cdot e^{bx} dx = b \cos ax \cdot e^{bx} + \frac{b}{a} \int \sin ax \cdot e^{bx} dx =$$

$$\cos ax \cdot e^{bx} - \frac{1}{a} \sin ax \cdot e^{bx} - \frac{1}{a} \cos ax \cdot e^{bx}$$

$$e^{bx} \cdot \cos ax - \frac{b \cdot e^{bx}}{a} \cdot \sin ax - \frac{1}{a} \cdot e^{bx} \cdot \cos ax$$

$$\int \cos ax e^{bx} dx = \frac{1}{a} \cos ax e^{bx} + \frac{b}{a^2} \sin ax e^{bx} - \frac{b^2}{a^2} \int \cos ax e^{bx} dx$$

$$\int \cos ax e^{bx} dx = \frac{(a b \cos ax + a b^2 \sin ax) e^{bx}}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{(a \cos ax + b \sin ax) \cdot a b \cdot e^{bx}}{a^2 + b^2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{j a}{\Omega(t-t_0)} \cdot e^{-j\Omega(t-t_0)} + \frac{1}{2\pi} \frac{j a}{+\Omega(t-t_0)} \cdot e^{j\Omega(t-t_0)} +$$

$$+ \frac{b}{2\pi} \cdot \frac{\frac{n\pi}{\Omega} \cdot [-j(t-t_0)]}{\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)^2 + (t-t_0)^2} \cdot \left(\frac{n\pi}{\Omega} - \cos \frac{n\pi}{\Omega} \cdot \omega + j(t-t_0) \cdot \sin \frac{n\pi}{\Omega} \right) \cdot e^{-j\omega(t-t_0)} \Big|_{-\Omega}^{\Omega} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{j a}{\Omega(t-t_0)} \cdot [e^{-j\Omega(t-t_0)} + e^{j\Omega(t-t_0)}] + \frac{b n}{2 \Omega} \cdot \frac{j(t-t_0)}{\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)^2 + (t-t_0)^2}$$

$$\left[(-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\Omega} \cdot e^{-j\Omega(t-t_0)} - (-1)^n \cdot \frac{n\pi}{\Omega} \cdot e^{j\Omega(t-t_0)} \right] =$$

$$= \frac{j a}{\pi \Omega(t-t_0)} \cdot \cos[\Omega(t-t_0)] + \frac{b n^2 \pi}{\Omega^2} \cdot \frac{(-1)^n j(t-t_0)}{\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)^2 + (t-t_0)^2} \cdot \sin \Omega(t-t_0)$$

! Excitation exte $f(t)$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$Y(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega) = \overbrace{F(\omega)}^{B(\omega)} \cdot A(\omega) \cdot e^{-\omega t_0} = B(\omega) \cdot e^{-\omega t_0}$$

natp. e caracterizat de un model și un argument.

$$|Y(\omega)| = |F(\omega)| \cdot |H(\omega)|$$

$$\arg Y(\omega) = \arg F(\omega) - \omega t_0$$

$$y(t) \leftrightarrow B(\omega) \cdot e^{-\omega t_0}$$

$$y(t-t_0) \leftrightarrow B(\omega) = F(\omega) \cdot A(\omega)$$

1. Sistem analogic cu o caracteristică de transfer

$$H(s) = K \frac{s-a}{s+a}$$

Dacă îl simulăm analogic prin metode de transformare z-sf -
noave (di-cuare timp sunt)

$$\text{over } s = \frac{z}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

$$H(z) = K \frac{\frac{z}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) - a}{\frac{z}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + a} = K \frac{z(z-Ta) - (z+Ta)}{z(z+Ta) - (z-Ta)}$$

problema este un singur pol în $z=a$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{z-Ta}{z+Ta} = a \Rightarrow z-Ta = za + Ta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{0^2 T} \neq a + zTa - z = 0. \quad a \text{ este dat} \Rightarrow \text{afine } T.$$

$$T = \frac{z-za}{a^2+a}$$

Si înlocuind sus obținem

$$H(z) = \frac{z(z - \frac{z-za}{a^2+a}) - (z + \frac{z-za}{a^2+a})}{z(z + \frac{z-za}{a^2+a}) - (z - \frac{z-za}{a^2+a})}$$

$$H(z) = K \frac{z \left(2 - \frac{z-za}{a^2+a} \cdot a \right) - \left(2 + \frac{z-za}{a^2+a} \cdot a \right)}{z \left(2 + \frac{z-za}{a^2+a} \cdot a \right) - \left(2 - \frac{z-za}{a^2+a} \cdot a \right)}$$

$$= K \frac{z \left(2 - \frac{z-za}{a^2+a} \cdot a \right) - \left(2 + \frac{z-za}{a^2+a} \cdot a \right)}{z \left(2 + \frac{z-za}{a^2+a} \cdot a \right) - \left(2 - \frac{z-za}{a^2+a} \cdot a \right)}$$

$$H(z) = \cancel{2K} = K \frac{2 \cdot 2 \left(1 - \frac{1-a}{a+1} \right) - 2 \left(1 + \frac{1-a}{a+1} \right)}{2 \cdot 2 \left(1 + \frac{1-a}{a+1} \right) - 2 \left(1 - \frac{1-a}{a+1} \right)}$$

$$= K \frac{2z(a+1-1+a) - 2(a+1+1-a)}{2z(a+1+1-a) - 2(a+1-1+a)} = K \frac{4az - 4}{4z - 4a} = K \frac{az-1}{z-a}$$

Dacă formă cerută - funcția de transfer este.

$$H(z) = K \frac{az-1}{z-a}$$

1) Pot obține acest semnal prin modulație de impulsuri în amplitudine. Cum practic

Prin modulație de tip produs nu putem obține acest semnal. El este modulul în amplitudine (nu în fază sau în frecvență). Din forma pe care o are nu putem avea o modulație de impulsuri în amplitudine pentru că semnalul este strict pozitiv.

Așa cum este de semnal pot determina indicele de modulație.

$$m' = \infty$$

Forma generală a semnalului MA este (de fapt avem limita dintre MA și MAPS).

$$s(t) \Rightarrow s_{MA}(t) = A_0 (\cos \omega_c t + D_M(t) \cos \omega_c t) = A_0 (\cos \omega_c t (1 + D_M(t)))$$

$$\text{să determinăm } A_0 \quad t_{\text{gl}} = \frac{4}{\frac{5}{4}T} = m \Rightarrow A_0 = m \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2\pi}{5} = \frac{5}{2} \frac{m \cdot \pi}{2}$$

m - parte decimale

$m' = \infty$ înseamnă o supra-modulație și în acest caz (folosind modulație tip produs) semnalul nu poate fi construit și decodat.



Cum în punctul A este doar semnalul nu corespunde la limită reală. Dacă nu există nici un semnal modulatoare care să modifice de produs se la forma de undă unită.

5) Avem deci un sistem discret cu intrare tot în timp continuu și ieșire în timp discret de la care folosim formula de

$$H(z) = \frac{1}{1+z^{-1}}$$

Cum am dat intrarea în sistem analogică

$$\int_{-\infty}^{\infty} t |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t \left(\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} d\omega \right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j(\varphi(\omega) + \omega t)} d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A'(\omega) \varphi'(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{A(\omega)}{j\varphi(\omega)} \cdot \varphi'(\omega) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot A(\omega) \cdot \left(-\frac{1}{j} + j\varphi(\omega) \right)' d\omega =$$

$$\frac{1}{\pi} F(\omega) \cdot A(\omega) \left(\frac{1}{j} + j\varphi(\omega) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \dots d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t |h(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t |h(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \varphi'(\omega) d\omega$$

Freibair probier zu demonstrieren relation.

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} t |h(t)|^2 dt = g(\omega) \quad \text{unde}$$

$$g(\omega) \rightarrow G(\omega) \quad \text{und} \quad G(\omega) = \frac{A'(\omega)^2 + A(\omega) \varphi'(\omega)}{2\pi}$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} t |h(t)|^2 dt = h(\omega) \quad \text{und} \quad h(\omega) = \frac{A'(\omega) \varphi'(\omega)}{2\pi}$$

$$x(t) \leftrightarrow E(\omega)$$

$$E(\omega) = \frac{1}{4} \left[\text{sign } j(\omega - \omega_0) - \text{sign } j(\omega + \omega_0) \right] \cdot \left[\text{sign } j(\omega - 1) - \text{sign } j(\omega + 1) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[-\text{sign } (\omega - \omega_0)(\omega - 1) + \text{sign } (\omega - \omega_0)(\omega + 1) + \text{sign } (\omega + \omega_0)(\omega - 1) - \text{sign } (\omega + \omega_0)(\omega + 1) \right] = \text{[scribbled out]}$$

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega \tau}{\pi \tau} \cdot \frac{\sin (t - \tau)}{t - \tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega \tau} - e^{-j\omega \tau}}{2j\tau} \right) \cdot \left(\frac{e^{j(t-\tau)} - e^{-j(t-\tau)}}{2j(t-\tau)} \right) d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jt} \cdot e^{j(\omega-1)\tau} - e^{-jt} \cdot e^{j(\omega+1)\tau} + e^{jt} \cdot e^{j(1-\omega)\tau} - e^{-jt} \cdot e^{j(1+\omega)\tau}}{4\tau(t-\tau)} d\tau$$

Se $x(t)$, $y(t)$ două semnale care satisfac relația 14
 $x(2t) = y(t)$

Se deduce că:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0) \quad \text{unde } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \forall \omega \in (-\infty, \infty)$$

Se presupune că $x(t)$ este periodică cu perioadă T și $x(t) = 0$ pentru $t < 0$ (semnal cu impulsuri de amplitudă unitară).

$$\sum_{-\infty}^{\infty} X(\omega - m\omega_0) = T \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty)$$

$$x(2t) = y(t)$$

(Lecture Notes, Journal of the
 Institute of Electrical and Electronics
 Engineers, 1997)

$$x(t) = \delta_T(t) = y(t) \cdot \delta_T(t)$$

$$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0)$$

Se deduce că:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \text{unde } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2\pi}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \text{unde } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2\pi}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t - nT) \quad \text{unde } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2\pi}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Se deduce că:

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$y(t) = 1$$

$$y(t) = 1$$

$$y(t) = 1$$

$$y(t) = 1$$

Se deduce că:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0)$$

(14)

2) * $\exists T a.i.$
 1) Să se demonstreze că dacă semnalele $x(t) = y(t)$ au perioadă T și $k = ct, T = ct$, transformate în Frecvență
 $x(nT) = ky(nT) \quad \forall n$, transformate în Frecvență
 satisfac relația $\sum_{-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega) = k \sum_{-\infty}^{\infty} Y(\omega - n\Omega)$ cu $\Omega = \frac{2\pi}{T}$

2) Se consideră semnalul $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)$ unde $f(t)$ este definit ca $f(t) = \begin{cases} A - \frac{t-t_0}{T} & t_0 \leq t < t_0 + T \\ -B \frac{t-t_0}{T} & t_0 + T \leq t < t_0 + 2T \\ 0 & \text{altfelunde} \end{cases}$
 $T \geq t_0$

să se aplică mînt. $h(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}$ și să se determine $y(t)$.
 h.c. del. cond. pt. care $X(\omega) = Y(\omega)$ notîndu-se că d. de la pct. 1.

3) Să se determine $y(t)$ dacă $x(t)$ este semnalul $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ și $h(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}$.
 h.c. del. la pct. 2. are. enunț mai mare.



Soluție:

1) Din $x(t) = ky(t)$ rezultă că $x(t) \delta_T(t) = k y(t) \delta_T(t)$
 deci $X(\omega) * \Omega \delta_\Omega(\omega) = k Y(\omega) * \Omega \delta_\Omega(\omega)$ adică

$$\sum_{-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega) = k \sum_{-\infty}^{\infty} Y(\omega - n\Omega)$$

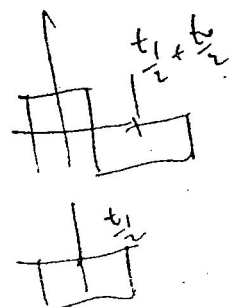
2) h.c. al 2. rezultă că ambele semnale sunt reale și impare.
 Dacă în timp la h.c. impulsul din $s(t) = \delta(t)$ este derivat, rezultă
 la p.c. cond. ca rîm la $s(t)$ să derivăm exact cît: $s'(t) = \delta(t)$.

$$3) A^2 t_0 \geq B^2 \left(\frac{1}{\alpha} \ln M - t_0 \right); \frac{\alpha(A^2 - B^2)t_0}{B^2} \geq \ln M$$

$$e^{\alpha \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right) t_0} \geq \left(\frac{A}{B} + 1 \right) e^{\alpha t_0} - \frac{A}{B}$$

$$- \left(1 + \frac{A}{B} \right) e^{\alpha t_0} + e^{\alpha \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right) t_0} \geq \left(\frac{A}{B} + 1 \right) e^{\alpha t_0} - \frac{A}{B}$$

$$e^{\alpha t_0} \left[e^{\alpha \frac{A^2}{B^2}} - \frac{A}{B} - 1 \right] \geq - \frac{A}{B}$$



①

Se consideră semnalele $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ și $y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$

1° Să se demonstreze că dacă există T și K astfel încât

$$x(nT) = Ky(nT) \quad \forall n, \text{ are la relația}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega) = K \sum_{-\infty}^{\infty} Y(\omega - n\Omega) \quad \text{cu } \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

2° Se introduce a $x(t)$ intrare și a $y(t)$ răspunsul sist. cu

f.d.t. $H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}$. Se consideră $x(t)$ de forma

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \quad \text{cu } f(t) \text{ arbitrar}$$

$$\text{iar } \delta(t) = \delta_1(t) + \delta_2(t) \quad \delta_1(t) = A p_{\frac{t_0}{2}}(t) \quad (\text{dreapta})$$

$$\delta_2(t) = -B p_{\frac{t_1}{2}}\left(t - \frac{t_0 + t_1}{2}\right)$$

Să se determine t_1 pentru care $x(t)$ și $y(t)$ satisfac condiția de la 1°. Caz particular $A = B$.

3° Pentru t_1 determinat să se stabilească diatare semnalele $\delta_1(t)$ și $\delta_2(t)$ cel cu energie mai mare

Soluție

$$1^{\circ} \quad x(nT) = ky(nT) \Rightarrow x(t) \delta_T(t) = ky(t) \delta_T(t) \Rightarrow X(\omega) * 2\pi \delta_{\omega}(0) = kY(\omega) \cdot 2\pi \delta_{\omega}(0)$$

$$\text{deci } \sum_{-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega) = k \sum_{-\infty}^{\infty} Y(\omega - n\omega)$$

2^o Pentru a ale 2 semnale să aibă esantioane proporționale este necesar ca răspunsul la fiecare impuls din $x(t)$ să dureze T . Se pune condiția ca răsp. să se anuleze la $t = t_1$.

$$y(t_1) = \alpha \int_0^{t_0} A e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau - \alpha \int_{t_0}^{t_1} B e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\left(\frac{A}{B} + 1 \right) e^{\alpha t_0} - \frac{A}{B} \right]$$

$$\text{caz particular } t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln(2 e^{\alpha t_0} - 1)$$

$$3^{\circ} \text{ Se compară } A t_0 \text{ cu } B^2 \left(\frac{1}{\alpha} \ln M - t_0 \right); \text{ unde } M = \left(\frac{A}{B} + 1 \right) e^{\alpha t_0} - \frac{A}{B}$$

k obține

$$e^{\alpha t_0} \left[e^{\alpha \frac{A^2}{B^2}} - \frac{A}{B} - 1 \right] \geq - \frac{A}{B} \quad \text{egalitate pentru } \alpha \rightarrow 0 \text{ sau } t_0 = 0$$

Rezultă că $x_1(t)$ are energie mai mare.